

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Simulação Numérica da Transferência de Calor
em Problemas Radiativos – Condutores**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

MARCUS VINICIUS FILGUEIRAS DOS REIS

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 2001

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR
EM PROBLEMAS RADIATIVOS - CONDUTIVOS**

MARCUS VINICIUS FILGUEIRAS DOS REIS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.
ORIENTADOR

Prof. JÚLIO CÉSAR PASSOS, Dr. Eng. Mec.
COORDENADOR DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. VICENTE DE PAULO NICOLAU, Dr. - Presidente

Profª. MÁRCIA BARBOSA MANTELLI, Ph. D.

Prof. FERNANDO OSCAR RUTTKAY PEREIRA, Ph. D.

**Dedico este trabalho a meus pais por terem me ensinado, através de
seus exemplos pessoais, a valorizar o saber.**

AGRADECIMENTOS

Aos contribuintes brasileiros que através do CNPq financiaram este trabalho.

Ao Prof. Clovis Raimundo Maliska pela orientação, motivação, suporte e paciência proporcionados em todos os momentos do trabalho.

Ao amigo Axel Dihlmann pela presteza que sempre me atendeu e pelo estímulo que sempre me proporcionou.

Ao Dr. Humberto Pontes Cardoso por nos ter trazido o assunto e o desafio de trabalhar com problemas envolvendo radiação e condução.

Aos amigos Clovis R. Maliska Jr, Marcos Cabral Damiani e em especial Rodrigo M. Lucianetti, pela valiosa e imprescindível colaboração e suporte na programação do simulador por mim utilizado neste trabalho.

A Noeli por toda sua colaboração e paciência ao longo do período de elaboração deste texto.

Aos colegas do SINMEC pelo excelente ambiente de trabalho.

Aos professores do curso de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	PRELIMINARES	1
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
1.2.1	FATOR DE FORMA	3
1.2.2	TROCA RADIATIVA ENTRE SUPERFÍCIES	9
1.2.3	METODOLOGIAS COMPUTACIONAIS	11
1.3	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES	11
1.4	ESCOPO DO TRABALHO	12
2	CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA	14
2.1	O PROBLEMA RADIATIVO-CONDUTIVO	14
3	FATOR DE FORMA	17
3.1	DEFINIÇÃO DO FATOR DE FORMA ENTRE SUPERFÍCIES DIFUSAS	17
3.1.1	FATOR DE FORMA ENTRE DOIS ELEMENTOS DE ÁREA INFINITESIMAL	17
3.1.2	FATOR DE FORMA ENTRE UM ELEMENTO DE ÁREA INFINITESIMAL E UM ELEMENTO DE ÁREA FINITA	18
3.1.3	FATOR DE FORMA ENTRE DOIS ELEMENTOS DE ÁREA FINITA	18
3.2	PROPRIEDADES DO FATOR DE FORMA ENTRE SUPERFÍCIES DIFUSAS	19
3.2.1	REGRA DA SOMA	19
3.2.2	RELAÇÃO DE RECIPROCIDADE	19
3.2.3	RELAÇÃO DE ADIÇÃO	20
3.2.4	ANALOGIA DE NUSSELT	20
3.2.5	ACURÁCIA E RECIPROCIDADE	21
3.3	MÉTODOS ANALÍTICOS PARA O CÁLCULO DO FATOR DE FORMA	22
3.3.1	INTEGRAÇÃO DIRETA	22
3.3.2	INTEGRAL DE CONTORNO	23
3.4	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O CÁLCULO DO FATOR DE FORMA	24
3.4.1	APROXIMAÇÕES E HIPÓTESES UTILIZADAS	25
3.4.2	DUPLA DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO APROXIMAÇÃO DE DISCO	29
3.4.3	HEMI-CUBE	35
3.4.4	INTEGRAL DE CONTORNO	43
3.4.5	VERIFICAÇÃO DE OBSTRUÇÕES	50
4	TROCA RADIATIVA ENTRE SUPERFÍCIES DIFUSAS CINZENTAS	54
4.1	HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS	54
4.2	TROCAS RADIATIVAS UTILIZANDO O CONCEITO DO FATOR DE FORMA	57
4.3	MÉTODO DA RADIOSIDADE	58
4.4	MÉTODO DE GEBHART	60

4.5	GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DA RADIOSIDADE	63
5	SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA RADIATIVO-CONDUTIVO	67
5.1	DISCRETIZAÇÃO GEOMÉTRICA	67
5.2	A VIZINHANÇA	68
5.3	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR	69
5.4	ACOPLAMENTO DAS SOLUÇÕES CONDUTIVAS E RADIATIVAS	73
5.4.1	ACOPLAMENTO COM O MÉTODO DA RADIOSIDADE	74
5.4.2	ACOPLAMENTO COM O MÉTODO DE GEBHART	76
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	80
6.1	ALGUMAS OBSERVAÇÕES QUANTO ÀS IMPLEMENTAÇÕES COMPUTACIONAIS DOS MÉTODOS DE CÁLCULO DO FATOR DE FORMA	80
6.2	ANÁLISE DA PRECISÃO DOS MÉTODOS DE CÁLCULO DO FATOR DE FORMA	82
6.2.3	DUAS PLACAS PARALELAS	82
6.2.3.1	Hemi-Cube	83
6.2.3.2	Dupla Discretização	85
6.2.3.3	Integral de Contorno	86
6.2.3.4	Comparação entre os Métodos	88
6.2.4	DUAS PLACAS PERPENDICULARES	90
6.2.4.1	Hemi-Cube	90
6.2.4.2	Dupla Discretização	92
6.2.4.3	Integral de Contorno	93
6.2.4.4	Comparação entre os Métodos	95
6.2.5	DUAS PLACAS PARALELAS COM OBSTRUÇÃO	96
6.2.5.1	Hemi-Cube	97
6.2.5.2	Dupla Discretização	98
6.2.5.3	Integral de Contorno	99
6.2.5.4	Comparação dos Métodos	99
6.2.6	PARALELEPÍPEDO COM OBSTRUÇÃO	100
6.3	ANÁLISE DA PERFORMANCE DOS MÉTODOS DE CÁLCULO DO FATOR DE FORMA	103
6.3.1	GEOMETRIAS SEM OBSTRUÇÃO	103
6.3.2	DUAS PLACAS PARALELAS COM OBSTRUÇÃO	104
6.3.3	PARALELEPÍPEDO COM OBSTRUÇÃO	108
6.4	VALIDAÇÃO NUMÉRICA DOS MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA RADIATIVO-CONDUTIVO	111
6.4.1	CONDUÇÃO BI-DIMENSIONAL	112
6.4.2	ALETA RADIATIVA	114
6.5	COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA RADIATIVO-CONDUTIVO	119
6.5.1	RADIAÇÃO E CONDUÇÃO ENTRE PLACAS PLANAS	119
6.5.1.1	Análise da Convergência dos Métodos	125
6.5.1.2	Análise do Tempo de Processamento	129
6.6	PROBLEMA ILUSTRATIVO	131
7	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	135

7.1	CONCLUSÕES	135
7.2	RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	136
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>		<u>138</u>

RESUMO

O presente trabalho tem enfoque no estudo de técnicas numéricas para a solução de problemas radiativos-condutivos envolvendo superfícies difusas cinzentas.

Maior ênfase é dada nas duas principais etapas do processo de cálculo da transferência de calor: o cálculo do fator de forma entre superfícies e na metodologia de solução do problema conjugado da troca de calor radiativa-condutiva. Diversas técnicas para o cálculo do fator de forma considerando superfícies obstrutoras, como Dupla Discretização, Integral de Contorno e Hemi-Cube são analisados em aspectos como acurácia, eficiência e custo computacional.

Um esquema baseado na metodologia CVFEM (*Control Volume Finite Element Method*) é utilizado para a discretização do problema condutivo em superfícies delgadas, sendo a parte radiativa resolvida utilizando o clássico método das radiosidades e sua performance comparada com uma implementação do método de Gebhart.

ABSTRACT

The present work deals with numerical techniques for the solution of coupled radiation/conduction heat transfer problems involving diffuse gray surfaces with non-absorbing media.

The two main focus of this work are the view factor calculation between obstructing surfaces and the different approaches for coupling the radiation and conduction equations.

Numerical techniques for view factor calculation, like Double Area Integration, Contour Integration and the Hemi-Cube are presented including methodologies for checking possible obstructing surfaces. Performance and accuracy of each method is demonstrated and analyzed.

A control volume finite element methodology is used for the solution of the heat conduction inside thin surfaces and the surface-to-surface radiation is solved using different numerical approaches. A numerical implementation of the Radiosity method is compared against the Gebhart's approach coupled with the solution of the heat conduction problem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Problema radiativo-condutivo	14
Figura 2.2 – Balanço de energia em um volume de controle elementar	15
Figura 3.1– Troca radiativa entre dois elementos infinitesimais	17
Figura 3.2– Analogia de Nusselt (Siegel e Howell, 1992)	20
Figura 3.3– Fator de forma entre duas placas paralelas (Siegel e Howell, 1992)	22
Figura 3.4– Fator de forma entre duas placas perpendiculares (Siegel e Howell, 1992)	23
Figura 3.5– Fator de forma entre um elemento infinitesimal e um disco de raio r (Siegel e Howell, 1992)	23
Figura 3.6– Entidades geométricas envolvidas no Teorema de Stokes (Siegel e Howell, 1992)	24
Figura 3.7– Discretização utilizada para o cálculo do problema radiativo	25
Figura 3.8– Violação da hipótese da proximidade	26
Figura 3.9– Violação da hipótese da visibilidade	27
Figura 3.10– Aproximação F_{1-2} por F_{d1-2}	28
Figura 3.11– Redução de erros devido a violação da hipótese da proximidade	28
Figura 3.12– Redução de erros devido a violação da hipótese da visibilidade	29
Figura 3.13– Elementos geométricos envolvidos no método da dupla discretização com a aproximação de disco	30
Figura 3.14– Fator de forma entre um elemento infinitesimal e um disco posicionado arbitrariamente no espaço	31
Figura 3.15– Dupla discretização com a aproximação de disco	33
Figura 3.16– Algoritmo do método da dupla discretização com a aproximação de disco	34
Figura 3.17– Implementação numérica da analogia de Nusselt	35
Figura 3.18– O Hemi-Cubo	36
Figura 3.19– <i>Pixels</i> das faces laterais e superior	37
Figura 3.20– Superfícies com fatores de forma idênticos	38
Figura 3.21– Violação da hipótese do falseamento	39
Figura 3.22– O processo de <i>clipping</i>	40
Figura 3.23– Algoritmo do método Hemi-Cube	41
Figura 3.24– Algoritmo do método Hemi-Cube (cont.)	42
Figura 3.25– Elementos geométricos envolvidos no método de Mitalas e Stephenson	43
Figura 3.26– Dois Segmentos em coordenadas unidimensionais	44
Figura 3.27– Contornos de área visível	46
Figura 3.28– Projeção do sub-elemento n na superfície A_m com obstrução	47
Figura 3.29– Algoritmo do método de Mitalas e Stephenson	48
Figura 3.30– Algoritmo do método de Mitalas e Stephenson (cont.)	49
Figura 3.31– Entes geométricos envolvidos no teste do cone	52
Figura 4.1– Cavidade com superfícies imaginárias	54
Figura 4.2– Discretização com superfícies isotérmicas	55

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,839 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:57 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 155 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

Figura 4.3– Emissividade espectral de superfície cinzenta por faixas	55
Figura 4.4– Cavidade composta por N superfícies	58
Figura 4.5– Grandezas envolvidas no método de Gebhart e no método das Radiosidades	66
Figura 5.1 –Malhas radiativa e condutiva	68
Figura 5.2 – Volume de controle para o método da mediana criado na malha condutiva	70
Figura 5.3 – Elemento triangular	71
Figura 5.4 – Representação de \vec{J} nas interfaces de integração	72
Figura 5.5 – Transferência de fluxos e temperatura nas malhas condutivas e radiativas	75
Figura 5.6 – Transferência dos acoplamentos radiativos das superfícies para os volumes de controle	78
Figura 6.1– Duas placas unitárias paralelas separadas por uma distância d	83
Figura 6.2– Duas placas paralelas – Método Hemi-Cube: Análise da resolução do Hemi-Cubo	83
Figura 6.3– Duas placas paralelas – Método Hemi-Cube: Análise do nível de discretização	84
Figura 6.4– Duas placas paralelas – Método Hemi-Cube: Análise do nível de discretização (<i>Zoom</i>)	85
Figura 6.5– Duas placas paralelas – Método da Dupla Discretização: Análise do nível de discretização	86
Figura 6.6– Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno: Análise em função do número de divisão dos contornos	87
Figura 6.7– Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno: Utilizando divisão automática dos contornos	88
Figura 6.8– Duas placas paralelas – Convergência dos métodos	89
Figura 6.9– Duas placas perpendiculares	90
Figura 6.10– Duas placas perpendiculares– Método Hemi-Cube: Análise da resolução do Hemi-Cubo	91
Figura 6.11– Duas placas perpendiculares– Método Hemi-Cube: Análise do nível de discretização da superfície	92
Figura 6.12– Duas placas paralelas – Método da Dupla Discretização: Análise do nível de discretização	93
Figura 6.13– Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno: Análise em função do número de divisão dos contornos	94
Figura 6.14– Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno: Utilizando divisão automática dos contornos	95
Figura 6.15– Duas placas perpendiculares – Convergência dos métodos	96
Figura 6.16– Duas placas paralelas com obstrução	97
Figura 6.17– Duas placas paralelas com obstrução – Método Hemi-Cube	97
Figura 6.18– Duas placas paralelas com obstrução – Método da Dupla Discretização	98
Figura 6.19– Duas placas paralelas com obstrução – Método da Integral de Contorno	99
Figura 6.20– Duas placas paralelas com obstrução – Comparação dos Métodos	100
Figura 6.21– Paralelepípedo com obstrução	101
Figura 6.22– Placas Paralelas com obstrução: Performance do método Hemi-Cube	104
Figura 6.23– Placas paralelas com obstrução: Performance do método da Dupla discretização	105
Figura 6.24– Placas paralelas com obstrução: Performance do método da integral de Contorno	105

Figura 6.25– Placas paralelas com obstrução: Comparação da performance dos métodos _____	106
Figura 6.26– Paralelepípedo com obstrução: Performance do método Hemi-Cube _____	109
Figura 6.27– Paralelepípedo com obstrução: Análise do método Hemi-Cube _____	109
Figura 6.28– Paralelepípedo com obstrução: Performance do método da Dupla Discretização _____	110
Figura 6.29– Paralelepípedo com obstrução: Performance do Método da Integral de Contorno _____	110
Figura 6.30– Paralelepípedo com obstrução: Comparação da performance dos métodos _____	111
Figura 6.31– Problema da condução bi-dimensional em uma placa plana com temperatura prescrita nas faces _____	112
Figura 6.32– Malha simulada e campo de isotermas obtidas o problema da condução bi-dimensional em uma placa plana com temperatura prescrita nas faces _____	113
Figura 6.33– Perfil de temperatura ao longo da reta $y = 0.5$ _____	114
Figura 6.34– Perfil de temperatura ao longo da reta $x = 0.5$ _____	114
Figura 6.35– Problema da aleta radiativa _____	115
Figura 6.36– Balanço de energia em um volume de controle de uma aleta radiativa _____	115
Figura 6.37– Malha unidimensional para o problema da aleta radiativa _____	117
Figura 6.38– Perfil de temperatura ao longo da direção x obtido para o problema da aleta radiativa _____	119
Figura 6.39– Esquema do problema radiativo-condutivo utilizado para a comparação dos métodos de Gebhart e Radiosidade _____	120
Figura 6.40– Malha utilizada para o problema radiativo-condutivo _____	121
Figura 6.41– Campo de fator de forma para o problema radiativo-condutivo _____	121
Figura 6.42– Isotermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 200$ e 250 K) _____	122
Figura 6.43– Isotermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 273$ e 300 K) _____	122
Figura 6.44– Isotermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 350$ e 400 K) _____	123
Figura 6.45– Isotermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 450$ e 500 K) _____	123
Figura 6.46– Isotermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 550$ e 600 K) _____	124
Figura 6.47– Perfis de temperatura em $x = 0,5$ quando $T_2 = 400$ K para diversos valores da emissividade em A_1 _____	125
Figura 6.48– Convergência obtida com o método de Gebhart para diversos valores de T_2 _____	126
Figura 6.49– Convergência obtida com o método da Radiosidade para diversos valores de T_2 _____	127
Figura 6.50– Convergência obtida com o método da Radiosidade para diversos valores de T_2 (Zoom) _____	128
Figura 6.51– Tempo de processamento do método de Gebhart para diversos valores de T_2 _____	129
Figura 6.52– Tempo de processamento do método da Radiosidade para diversos valores de T_2 _____	130
Figura 6.53– Problema ilustrativo _____	131
Figura 6.54– Discretização utilizada no problema ilustrativo _____	132
Figura 6.55– Campo de temperaturas obtido no problema ilustrativo _____	133
Figura 6.56– Isotermas obtido no problema ilustrativo _____	133
Figura 6.57– Posição da linha ao longo do hemisfério _____	134
Figura 6.58– Isotermas obtido no problema ilustrativo _____	134

SIMBOLOGIA

A_s	Área da superfície 's' (1, 2, 3, ...)	[m ²]
A_p	Área projetada	[m ²]
\vec{n}	Vetor normal à superfície	[m]
dA	Elemento de área infinitesimal	[m ²]
F_{1-2}	Fator de forma entre A_1 e A_2	
F_{I-J}	Fator de forma entre A_I e A_J	
F_{d1-d2}	Fator de forma entre dA_1 e dA_2	
F_{d1-2}	Fator de forma entre dA_1 e A_2	
F_{i-j}	Fator de forma entre A_i e A_j	
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	[W/m ² K ⁴]
α	Absortividade	
ε	Emissividade	
ρ	Refletividade	
τ	Transmissividade	
k	Condutividade térmica	[W/mK]
c_p	Calor específico	[J/KgK]
ρ	Densidade	[kg/m ³]
I	Intensidade Radiativa	[W/m ² sr]
E	Emitância	[W/m ²]
G	Irradiância	[W/m ²]
J	Radiosidade	[W/m ²]
G_{i-j}	Acoplamento radiativo entre as superfícies A_i e A_j	
T	Temperatura	[K]
Q''	Fluxo de Calor	[W/m ²]
\dot{E}	Energia por unidade de tempo	[W]
\dot{q}	Geração de calor	[W/m ³]
Φ	Energia radiante	[J]
q	Taxa de fluxo da calor	[W]

t	Tempo	[s]
w	Ângulo sólido	[sr]
θ	Ângulo polar (medido da normal da superfície)	[rad]
φ	Ângulo azimutal	[rad]
\vec{r}	Distância em coordenadas esféricas	[m]
x, y, z	Coordenadas cartesianas	[m]
λ	Comprimento de onda	[μm]
S	Distância entre duas superfícies	[m]
N	Número de superfícies em uma cavidade	
$\ \cdot \ _2$	Norma Euclidiana dos resíduos	

Subíndices e Superíndices

P	Área projetada
$1, 2, \dots$	Superfícies 1, 2, ...
$d1, d2, \dots$	Elemento de área infinitesimal 1, 2, ...
i, j, \dots	Superfícies i, j, ...
λ	Grandeza espectral
e	Energia emitida
s	Área superficial
i	Energia Incidente
b	Corpo Negro
\cdot	Grandeza direcional

1 Introdução

1.1 Preliminares

Fenômenos envolvendo troca de calor por radiação e condução são comumente encontrados em inúmeras situações de engenharia. A título de exemplo, pode-se citar os problemas envolvidos no controle térmico de satélites. Em virtude de diferentes solicitações térmicas, tanto externas como internas, durante todo o período de sua existência, os satélites encontram-se sujeitos a elevados gradientes de temperaturas. Por um lado, tem-se grandes fontes de calor como a radiação solar e a dissipação de energia devido a componentes internos, e por outro, tem-se todo o espaço sideral ao seu redor, um enorme sumidouro de calor comumente considerado como um corpo negro a 4 K

Sob a influência destes grandes gradientes de temperatura, grande parte de sua carga útil (*payload*), como baterias, lentes e sensores ópticos, possuem características de comportamento térmico bem peculiares e necessitam permanecer em estreitas faixas de temperatura para a obtenção de seus pontos ótimos de funcionamento. O bom funcionamento destes componentes assegura todo o período de vida útil do satélite. Como no espaço existe vácuo, a forma mais eficiente de dissipação de calor é obtida através do controle de fenômenos de radiação e da condução de calor no interior dos equipamentos.

Conhecer o comportamento do campo de temperaturas nos pontos críticos do projeto, isto é, as temperaturas máximas e mínimas para cada ponto de interesse e garantir que todos os componentes operem dentro da faixa desejada ao longo de toda a órbita, é o objetivo do engenheiro térmico. Em virtude dos altos custos envolvidos tanto na construção e na operação destes equipamentos espaciais, a simulação computacional de todo o sistema térmico é uma ferramenta útil e de vital importância para o engenheiro desta área, pois possibilita de maneira prática e econômica, que todas as situações possam ser simuladas e previstas em computador, visando garantir que os comportamentos térmicos de todos os componentes durante o vôo, estejam dentro dos limites especificados.

O trabalho aqui proposto consiste no estudo e desenvolvimento de técnicas numéricas

para a simulação de problemas radiativos-condutivos acoplados, envolvendo superfícies difusas, cinzentas e opacas, na ausência de fluidos (meio participante).

Não somente na indústria espacial como também em outras aplicações, a hipótese de superfícies difusas, cinzentas, opacas e *in vacuo* pode ser assumida. De acordo com Gebhart (1961), esta hipótese pode ser uma boa aproximação mesmo tratando-se de superfícies não difusas e direcionais, pois em geral estas encontram-se sujeitas a vários tipos de desgastes, como erosões, corrosões e outros tipos de alterações superficiais que acabam por alterar as suas propriedades.

O presente estudo dedica maior ênfase nas duas principais etapas do processo de modelagem computacional dos fenômenos acima mencionados: o cálculo do fator de forma (ou de configuração) entre as superfícies e nas possíveis metodologias de solução do problema da troca de calor acoplando radiação e condução.

Pode-se dizer que uma das grandes dificuldades em problemas radiativos é a precisão do cálculo do fator de forma entre um conjunto de superfícies quaisquer e o tempo computacional envolvido para o seu cálculo.

O valor do fator de forma de uma superfície no interior de um cubo para as outras demais superfícies é de aproximadamente 0,2. Valores do fator de forma computados entre superfícies quadradas unitárias, separadas por distâncias de 1, 2, 5 e 10, são aproximadamente 0,2; 0,05; 0,01 e 0,005. Na maioria dos problemas reais, distâncias de aproximadamente 5 vezes as dimensões características representam a maior parte dos problemas e os valores encontrados estão em torno de 0,01 e 0,1; sendo usualmente encontrados valores da ordem de 0,001 para muitos pares de superfícies. Analisando os dados aqui demonstrados, conclui-se que qualquer método computacional utilizado para este cálculo, deve ser capaz de obter precisões na ordem de quatro dígitos ou mais.

De acordo com Walton (1987), o problema no cálculo dos fatores de forma não está no fato de que eles são difíceis de serem computados, mas sim, no fato de que o tempo necessário para o seu processamento aumenta exponencialmente com o número de superfícies envolvidas. Em problemas que envolvem N superfícies, existem N^2 fatores de forma que precisam ser calculados. Utilizando simplificações como a reciprocidade (mostrada adiante), ocorre uma redução desse valor para $N(N - 1)/2$. Se existem bloqueios entre superfícies para cada cálculo do fator de forma devem ser realizadas $(N - 2)$ checagens para a procura de possíveis superfícies que causem obstruções. Isto fornece um total de $N(N - 1)(N - 2)/2$

verificações, resultando em valores da ordem de N^3 . Em adição a isso, a maioria dos procedimentos para o cálculo onde há bloqueio, tende a ser muito menos eficiente, mais demorada e menos precisa.

Taylor *et al.* (1994) demonstrou também que o cômputo da troca de calor pode ser altamente sensível à imprecisão do cálculo do fator de forma, sendo este o responsável por consideráveis fontes de erros nos modelos.

A solução do problema conjugado da troca de calor radiativa e condutiva não é recente e vem ao longo do tempo sendo realizado de diversas maneiras. Diversos simuladores térmicos voltados para aplicações espaciais e industriais já foram construídos e vem sendo utilizados amplamente. Dentre eles destacam-se o SINDA (1992), construído pela agência espacial americana - NASA, o ESATAN (1998) – construído pela agência espacial européia – ESA, e o PCTER (1985) – Pacote de Análise Térmica, desenvolvido pelo INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. O presente trabalho pode ser entendido como uma continuação dos estudos baseados nos modelos já implementados nestes simuladores, comparando duas possíveis implementações para o cálculo da parte radiativa, visando a melhor performance e o menor custo computacional.

É importante ressaltar que caso as etapas do cálculo do fator de forma e da troca de calor radiativa sejam imprecisamente computadas, os seus efeitos podem inviabilizar a construção de modelos com alto grau de fidelidade, como os necessários na indústria espacial.

A seguir é apresentada a evolução dos diversos esquemas propostos para o cálculo do fator de forma entre superfícies, e dos modelos computacionais utilizados para a solução de problemas envolvendo radiação e condução.

1.2 Revisão Bibliográfica

1.2.1 Fator de Forma

A determinação da troca radiativa entre superfícies vem sendo objeto de pesquisa ao longo dos anos nas mais diversas áreas. Na engenharia mecânica, a radiação sempre foi e continua sendo estudada como um fenômeno de transferência de calor visando o projeto térmico de equipamentos. Pode-se citar como exemplo, o grande número de trabalhos

publicados na área de radiação em meados das décadas de 60 e 70, quando a corrida tecnológica para a conquista do espaço forneceu um grande estímulo às determinações precisas das trocas radiativas em equipamentos eletrônicos. Na área de edificações e arquitetura, o assunto de iluminação é foco de constante pesquisa envolvendo temas relacionados ao conforto térmico e o cálculo da radiação solar. Recentemente, a área de computação gráfica, a qual tem se beneficiado diretamente do imenso avanço dos recursos computacionais e do interesse em construir imagens cada vez mais realísticas considerando o preciso cálculo da iluminação em ambientes, vem realizando grandes contribuições. Esta última alicerça suas técnicas de construção de imagens em teorias básicas de radiação de calor, amplamente conhecida pelos engenheiros da área térmica.

As áreas de engenharia e física são pioneiras no estudo do fator de forma. O conceito que se podia, na equação de radiação, definir um fator que contivesse somente elementos geométricos e representasse quantidades energéticas, deve-se certamente a Nusselt (1928) no seu trabalho onde apresenta a derivação da técnica da Esfera Unitária. Neste texto ele refere-se a um “*angle-factor*”, que em termos atuais, representa a parcela de energia radiante que sai de uma superfície e é incidente em outra.

Inicialmente, quando não se tinha acesso aos computadores, para um conjunto muito limitado de configurações geométricas, valores analíticos para o cálculo do fator de forma eram calculados (Hamilton e Morgan, 1952; Howell, 1982; Gross *et al.*, 1981). Apesar desse pouco número de configurações não fornecer muita versatilidade para cálculos reais, a metodologia analítica ainda é muito utilizada para a validação e comparação de métodos numéricos. Quando existe a possibilidade de obstruções, a avaliação dos fatores de forma de maneira analítica é, em geral, impossível, sendo necessário a utilização de técnicas aproximadas.

Os métodos numéricos para o cálculo do fator de forma, diferem na maneira como realizam o cálculo da integral dupla de área, considerando a presença ou não de obstruções. Em meados da década de 60, como descrito por Kadaba (1982), com o surgimento dos computadores, técnicas numéricas aproximadas para a realização da integração da expressão do fator de forma foram desenvolvidas. Métodos como a Dupla Discretização (Shapiro, 1985) foram um dos primeiros a surgir, pois são decorrentes diretos de uma discretização superficial e da conseqüente avaliação numérica da dupla integral. Ao longo do tempo, inúmeras variações deste método foram implementadas e ainda vem sendo utilizadas em várias rotinas

computacionais como o VIEWC (Emery, 1986) e FACET (Shapiro, 1983).

Um outro exemplo da avaliação numérica da dupla integral de área, consiste na utilização do Teorema de Stokes para a redução da dupla integral de área para uma dupla integral ao longo dos contornos das superfícies envolvidas (Siegel e Howell, 1992). Este método, embora se apresente rápido quando implementado computacionalmente (Shapiro, 1985), sofre de problemas para a determinação dos contornos visíveis quando obstruções estão presentes. Com a utilização do trabalho de Mitalas e Stephenson (1966), aonde foi mostrado que quando utilizamos contornos retos, uma destas integrais de contorno pode ser resolvida analiticamente, este método ganha maior precisão, pois resulta em menores aproximações na avaliação do fator de forma.

O trabalho de Walton (1987) foi um dos pioneiros na utilização do método da Integral de Contorno considerando obstruções. Ele utiliza o trabalho de Mitalas e Stephenson e compara sua performance com a técnica da Dupla Discretização. O seu trabalho utiliza uma associação de técnicas de projeções e *clipping* (recorte) de polígonos para a determinação das regiões de sombra. Visando obter maior precisão, Walton utiliza expressões analíticas quando existem contornos adjacentes e a técnica da Quadratura Gaussiana para avaliação numérica da integral. Ele também propõe uma série de checagens hierárquicas para a eliminação de superfícies não obstrutoras. Vale a pena ser ressaltado que, em virtude do refinamento e da qualidade deste trabalho, o mesmo foi tomado como referência para o presente estudo.

Ainda no campo da engenharia, outras técnicas numéricas que possuem algumas semelhanças com o método de elementos finitos foram também utilizadas para o cálculo do fator de forma entre superfícies, sendo um bom exemplo apresentado no trabalho de Chung e Kim (1982). Em 1993, trabalhos como o de Saltiel e Koliba (1993) demonstram a utilização de malhas superficiais adaptativas na obtenção de fatores de forma cada vez mais precisos.

Paralelamente aos desenvolvimentos nos segmentos de engenharia e arquitetura, durante a década de 80, os trabalhos da área de computação gráfica trouxeram as maiores contribuições para o cálculo do fator de forma. Como vem se observando nos últimos anos, a representação de imagens realísticas tem se tornado uma vertente própria do ramo de computação gráfica. Neste tipo de aplicações, o cálculo do fator de forma está intimamente relacionado com a técnica utilizada para o cômputo da troca de calor, pois objetiva-se a determinação das intensidades luminosas incidentes nos objetos que serão desenhados nas imagens. De acordo com Claro (1998), existem duas técnicas de construção de imagens

amplamente difundidas: o método *Ray – Tracing* (termo que pode ser traduzido como perseguição ao raio) e o tradicional método das Radiosidades.

De maneira simples e genérica, o método *Ray – Tracing* consiste em emitir raios em direções aleatórias (da superfície de interesse ou na direção do observador), computando aqueles que atingem as outras superfícies do ambiente (ou cena). O cálculo do fator de forma, ou até mesmo a troca radiativa, será função do número de raios que atingiram as superfícies. Este método começou a ser utilizado pela *Apple Co.* a partir de 1968 apenas na determinação do ocultamento de superfícies em imagens tridimensionais. Somente em 1979 é desenvolvido o primeiro uso do *Ray-Tracing* incorporando reflexão e sombras (Watt, 1990; Foley *et al.* 1990). Apesar de apresentar bons resultados, a cada mudança de posição do observador, a iluminação precisava ser recalculada, tornando este método bastante moroso.

Um dos métodos de *Ray-Tracing* mais difundidos é o Monte-Carlo. Conforme descrito por Pattanaik *et al.* (1992) este método utiliza uma distribuição estatística para as direções de emissão e um gerador de números aleatórios entre 0 e 1 para obter probabilidades acumuladas, obtendo implicitamente as direções de emissões. Desta maneira, raios ou fótons são emitidos em direções aleatórias de pontos escolhidos (aleatoriamente ou não) da superfície emissora. Para cada raio emitido é realizado uma verificação para que se possa analisar se esse atingiu a superfície desejada. Caso o raio atinja a superfície receptora, valores são adicionados para o cálculo do fator de forma, e assim sucessivamente. A principal vantagem deste método probabilístico é o fato de poder se estimar o grau de incerteza de seus cálculos. Apesar de demandar enorme esforço computacional para o cálculo do fator de forma ou troca de calor em superfícies difusas (pois em geral centenas de milhares de raios são necessários), pequenas modificações são necessárias para que o modelo leve em consideração os efeitos especulares. Assim este método apresenta vantagens significativas quando problemas mais complexos são analisados.

Em meados da década de 80, Goral *et al.* (1984) apresentaram um dos primeiros trabalhos de computação gráfica visando a representação de imagens, que se apóia nas técnicas do cálculo de radiosidades amplamente utilizadas pelos engenheiros térmicos. Em 1985, Cohen e Greenberg, dando continuidade ao trabalho de Goral *et al.*, baseando-se no cálculo das radiosidades, propõe um método que ficou amplamente difundido no tratamento da luz difusa em computação gráfica. Este método chamado de *Hemi-Cube*, é uma extrapolação do método de projeção da esfera unitária de Nusselt (Siegel e Howell, 1992)

para o cálculo dos fatores de forma. Ainda de acordo com Claro (1998), a grande vantagem apontada pela utilização do *Hemi-Cube* com o método das Radiosidades é o fato de ser um modelo que relaciona a geometria entre os objetos do ambiente independentemente do ponto de vista do observador, permitindo que os valores da luminância das superfícies sejam utilizados na construção da imagem segundo diversos pontos de vista, sem a necessidade de se efetuar o cálculo a cada mudança da posição do observador. Este método será explicado em detalhe ao longo do texto, pois constitui um dos focos principais do presente estudo.

Nos anos posteriores, Wallace e Cohen (1987) e Kajiya (1986) e Immel *et al.* (1986) publicaram seus primeiros trabalhos unindo e analisando as vantagens e desvantagens da união das técnicas de *Ray-Tracing* e Radiosidades com o intuito de analisar o problema envolvendo superfícies difusas e especulares.

Em 1988, Cohen *et al.* propuseram o método do Refinamento Progressivo, o qual muda um pouco a abordagem anterior da radiosidade e da utilização do *Hemi-Cube*, focando não a superfície que recebe energia, mas sim as superfícies que emitem mais energia e depois as que emitem menos energia. No método apresentado, a visualização da imagem é possível a cada iteração. Isto foi realizado utilizando leis de reciprocidade visando a obtenção de maior eficiência do modelo. O intuito era obter a representação de imagens, alterando a posição do observador em tempo real.

Em 1989, Wallace *et al.*, publicaram um trabalho comentando as limitações do *Hemi-Cube* e propondo um esquema de *Ray-Tracing* utilizando um método baseado no Refinamento Progressivo acima citado. Este esquema propõe uma nova abordagem para a técnica da Dupla-Discretização, analisada agora do ponto de vista de um método tipo *Ray-Tracing*. Wallace sugere uma nova aproximação para a avaliação dos fatores de forma da dupla integral, utilizando a chamada “*disc approximation*”. Esta nova aproximação corrige o método da Dupla Discretização quando as superfícies envolvidas estão muito próximas, evitando que seus fatores de forma excedam a unidade. Esta aproximação será mais detalhada posteriormente.

De acordo com Claro (1998), os trabalhos acima citados de Cohen e Wallace serviram como base para praticamente todos os desenvolvimentos posteriores para os modelos de iluminação utilizados em computação gráfica, influenciando também a comunidade de engenharia preocupada com as trocas térmicas e a precisão do cálculo do fator de forma. A partir destes trabalhos, as publicações seguintes tendem a corrigir pequenas deficiências e

aumentar a performance destes métodos. Nesta linha, Baum *et al.* em 1989, publicaram um artigo onde descrevem os erros inerentes do método do *Hemi-Cube* e propõem um algoritmo que verifica a existência destes erros, utilizando correções através da utilização de um método analítico. O autor ressalta também que estes erros são mais frequentes quando se utiliza a técnica do Refinamento Progressivo. O algoritmo proposto resolve a integral externa do fator de forma numericamente e a interna analiticamente. Como resultado, eles propõem uma nova estratégia chamada de Refinamento Progressivo Híbrido.

No mesmo ano, Sillion e Puech (1989), utilizando o trabalho de Wallace como base, propõem um método geral para a integração da reflexão difusa e especular. Neste trabalho, utiliza-se um novo método de distribuição de raios.

No ano seguinte, Rushmeier (1990), publicou o seu primeiro artigo que propõe uma otimização do algoritmo *Hemi-Cube* utilizando rotinas já implementadas em nível de *hardware* da máquina. Os resultados são uma redução do tempo de processamento da ordem de 6 a 7 vezes.

Na sequência, Hanrahan *et al.* (1991), baseado em um método de *Ray-Tracing* recursivo propõem um algoritmo de Radiosidade Hierárquica Rápida, sendo detalhado posteriormente por Auperle em 1993. De maneira simplificada, este algoritmo utiliza uma sucessão de refinamento das superfícies do ambiente, até que o erro no cálculo do fator de forma esteja dentro de um valor previamente especificado.

Em 1993, Hanrahan e Schroder, apresentam um dos primeiros trabalhos com uma expressão fechada para o cálculo do fator de forma entre dois polígonos quaisquer no espaço. Porém a solução não é elementar, pois utiliza complexas e extensas funções di-logarítmicas. Os autores reconhecem que o valor principal da fórmula é ser utilizada como solução *benchmark* para os métodos numéricos. Na mesma linha que Baum *et al.* (1989), Schroder em 1993 publicou outro artigo que utiliza funções analíticas aproximadas para a estimação dos fatores de forma entre polígonos com fronteira comum. Embora este método apresente um erro relativamente baixo, é um método computacionalmente dispendioso.

Como descrito em Claro (1998), Hanrahan e Teller em 1994, visando reduzir o número de checagens para as verificações de obstruções, propõem o conceito de “células de visibilidade”, onde também permite-se a priori, excluir do cálculo do fator de forma as superfícies que não se “enxergam”. Ainda no mesmo ano, Muller e Schoeffel (1994), apresentaram um método interativo para a visualização de ambientes virtuais, ou seja, com a

movimentação do observador. Este trabalho julga o método do *Hemi-Cube* inadequado e utiliza o *Ray-Tracing* recursivo.

Ainda na área de computação gráfica, entre 1994 e 1997 inúmeros trabalhos surgiram dando, agora, mais ênfase no método de Monte Carlo (*Ray-Tracing*) e melhorando sua performance. Dentre eles podemos citar (Keller, 1995; Drakos, 1996; Khodulev, 1996 e Rademacher, 1997). Em virtude do crescimento do poder computacional e da utilização de funções já implementadas em nível de *hardware*, o método de Monte Carlo deixou de ser tão custoso computacionalmente, e por ser mais flexível para poder lidar com superfícies mais complexas (especulares) começou a ser utilizado em maior escala.

Recentemente alguns trabalhos começaram a tirar proveito das arquiteturas distribuídas e das técnicas de processamento paralelo, visando um cálculo mais preciso dos fatores de forma. Os trabalhos de Schmidt (1997) e Stuttard *et al.* (1996) são bons exemplos de técnicas aproximadas para o cálculo do fator de forma que utilizam tal funcionalidade.

As técnicas e melhorias introduzidas pela computação gráfica contribuíram muito para o cálculo do fator de forma, mas pouco influenciaram nos algoritmos de solução das equações de troca de calor radiativa. Alguma contribuição pode ser obtida quando da utilização do método probabilístico de Monte Carlo para a obtenção da troca de calor, mas quando voltamos nossa atenção para a solução do sistema resultante do método das Radiosidades, poucos avanços surgiram. Isto deve-se ao fato de que o principal foco da computação gráfica, naturalmente, é a síntese de imagens realísticas, e não a determinação do campo de temperaturas acopladas com outros modos de transferência de calor. Outro fator a ser salientado é que em virtude do sistema linear resultante do método das Radiosidades possuir uma matriz com diagonal dominante, o mesmo é relativamente simples de ser resolvido. Assim, inúmeros processos iterativos poderiam ser utilizados sem apresentar significativas diferenças de desempenho. O trabalho de Wiesenhofer (1996), é um bom exemplo, pois ilustra diversas técnicas iterativas desenvolvidas para a solução da matriz de radiosidades utilizadas pelos especialistas da área de computação gráfica.

1.2.2 Troca Radiativa entre Superfícies

Como mencionado anteriormente, durante o começo da corrida espacial, muitos milhares de dólares foram gastos pelos governos de vários países para a pesquisa envolvendo trocas radiativas. Nesta ocasião, diversas técnicas surgiram para a solução deste problema. De

acordo com Sparrow (1963), os métodos apresentados por Hottel (1954), Oppenheim (1956), Eckert e Drake (1959), e Gebhart (1961) podem ser referenciados como os pioneiros neste tipo de aplicação.

O texto de Eckert e Drake (1959) descreve o clássico Método das Radiosidades. Este método faz um balanço de energia para cada superfície, levando em consideração toda a energia que sai dela por radiação (emitida + refletida) comumente chamada de radiosidade. Este método resulta em um sistema de N equações que precisam ser resolvidas para cada superfície. O trabalho de Hottel (1954) aplica uma estratégia diferente, fazendo um balanço de energia dando ênfase à troca líquida entre somente um par de superfícies. Esta troca líquida entre as duas superfícies leva em consideração somente as energias emitidas entre elas, com as outras superfícies do ambiente apenas servindo de assistentes, transferindo a energia através das multi-reflexões. Embora este método utilize um ponto de partida diferente do Método das Radiosidades, ele chega as mesmas equações de trocas líquidas entre as superfícies.

Fazendo uma analogia com circuitos elétricos, Oppenheim (1956) deduz uma série de equações para a troca radiativa que são tratadas como se fossem circuitos elétricos, montados através de uma série de resistências e capacitores, utilizando as leis comumente empregadas para análises deste tipo. Este trabalho tornou simples o entendimento e o cálculo do fenômeno da radiação.

Em 1961, Gebhart propõe um novo conceito chamado de “*absorption factors*” (coeficientes de absorção), fazendo uma análise levando em consideração a energia que é absorvida na superfície. No seu trabalho, ele deduz uma seqüência de equações de trocas radiativas que comprovam que superfícies cinzentas e opacas atingem uma temperatura de equilíbrio que é independente da sua emissividade (ou absortividade). Através do trabalho de Gebhart temos a introdução do conceito de acoplamento radiativo (G_{i-j}) entre duas superfícies que se “enxergam”. Este método demonstra-se muito vantajoso por apresentar simples implementação computacional, quando acoplado com a solução de outros modos de transferência de calor, principalmente os métodos simples que resolvem a condução de calor utilizando um circuito elétrico análogo. Com a noção de acoplamento radiativo pode-se facilmente para cada superfície, em um problema complexo, saber qual a sua contribuição radiativa para uma outra. Este método será detalhado ao longo deste texto.

1.2.3 Metodologias Computacionais

Referente a construção de sistemas computacionais completos que acoplem a solução radiativa com a solução dos outros modos de transferência de calor, várias metodologias numéricas como o método dos nós, diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos já foram utilizadas e são amplamente difundidas para a solução de problemas de difusão e convecção.

O presente trabalho resolve a condução de calor em superfícies bi-dimensionais (placas planas delgadas) posicionadas arbitrariamente no espaço e discretizadas em triângulos. Um esquema tipo CVFEM (*Control Volume Based Finite Element Method*) (Baliga e Patankar, 1980), é usado para a aproximação do problema difusivo. Maiores informações sobre este método e outras técnicas numéricas para a solução de problemas de condução de calor podem ser encontradas em Maliska (1995).

Especificamente, no início da indústria aeroespacial, quando não se dispunha de computadores, metodologias mais simples que representavam sistemas térmicos analisados de forma discreta como em circuitos elétricos foram utilizados. Análises simplificadas podem ser facilmente realizadas à mão e modelos mais complexos acabam sendo resolvidos em computador. Métodos numéricos baseados nesta metodologia tipo “*lumped*” foram desenvolvidos inicialmente por Southwell, Emmons e Dusenberry nos anos 40 (ESATAN, 1998). Em 1966 J. Gaski na NASA, baseado nesta metodologia, desenvolve o código SINDA (1992) – “*System Improved Numerical Differencing Analyzer*”, constituindo o primeiro sistema de análise térmica voltado para aplicações espaciais. Já no início da década de 80 a ESA desenvolve o ESATAN (1998), substituindo o SINDA em seus laboratórios e adicionando algumas melhorias. Com a mesma filosofia, no Brasil, o PC-TER (1985) foi desenvolvido pelo INPE. Como dito anteriormente, o trabalho aqui proposto pode ser entendido como um descendente direto desta evolução.

1.3 Objetivos e Contribuições

Os objetivos do trabalho aqui proposto estão galgados no estudo e implementação de técnicas numéricas para o cálculo do fator de forma entre superfícies difusas, cinzentas e opacas. Visando investigar aspectos como acurácia, desempenho do método na presença de

obstruções e rapidez computacional, algumas configurações geométricas de interesse são analisadas.

Além do estudo envolvendo o cálculo do fator de forma, o trabalho apresenta duas possíveis implementações para a solução de problemas envolvendo radiação e condução acoplados. A primeira implementação utiliza o tradicional Método das Radiosidades e a segunda o Método de Gebhart. Como dito anteriormente, para a solução da parte difusiva é empregado um esquema tipo CVFEM, implementado aqui para tratar superfícies discretizadas em triângulos. Em virtude destes dois métodos apresentarem características distintas de acoplamento com a solução da condução de calor e de como tratam as não linearidades do problema, fatores como convergência e tempo de processamento são objetos de interesse.

Uma contribuição importante deste estudo é o fato de que o mesmo foi diretamente empregado no desenvolvimento do aplicativo de análise térmica SATER100 (2000). O *software* SATER100 consiste de uma ferramenta de simulação e análise do problema conjugado de transferência de calor por condução e radiação, em superfícies de geometrias tri-dimensionais. O aplicativo também apresenta a flexibilidade de tratar problemas de convecção e transferência de massa, por utilizar uma representação simplificada destes coeficientes quando tais fenômenos estão presentes. O projeto citado acima, iniciou em fevereiro de 1999, e tem seu encerramento planejado para o início de 2001, sendo um consórcio desenvolvido entre as empresas ESSS-*Engineering Simulation and Scientific Software* (Florianópolis), Equatorial Sistemas (São José dos Campos), TCS Engenharia (São José dos Campos) e o Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor – EMC/UFSC. O presente estudo visou analisar, implementar e verificar quais metodologias seriam mais adequadas e eficientes para o tipo de aplicação que se pretende resolver com tal aplicativo.

Toda a implementação computacional foi desenvolvida na linguagem C++, utilizando a técnica de “Programação Orientada a Objetos” (OOP), visando garantir uma boa performance numérica aliada a uma programação organizada e de fácil re-usabilidade (Barton e Nackman, 1997).

1.4 Escopo do Trabalho

Os capítulos subseqüentes estão divididos da seguinte maneira:

No capítulo seguinte (segundo) caracteriza-se o problema a ser estudado e apresenta-se alguns fundamentos e definições físicas necessários para a introdução e o entendimento de hipóteses envolvendo os fenômenos radiativos e condutivos que serão expostos. Objetiva-se neste capítulo fornecer uma visão geral do problema e abordar alguns aspectos e conceitos que podem, se adequadamente esclarecidos, facilitar o estudo de outros engenheiros que porventura necessitem trabalhar com problemas envolvendo condução e principalmente radiação.

No terceiro capítulo é introduzido o assunto sobre fatores de forma, apresentando sua definição, suas características e os métodos aqui utilizados para o seu cálculo computacional. Em síntese, são apresentados os métodos de Dupla Discretização, Integral de Contorno e *Hemi-Cube*. Neste capítulo são também discutidas as rotinas computacionais necessárias para a implementação destes métodos adicionados de algoritmos para tratamento de obstruções.

No quarto capítulo são apresentados os diversos métodos de solução do problema radiativo isolado. O tradicional Método das Radiosidades e o Método de Gebhart são apresentados e comparados sob o ponto de vista de suas formulações.

No quinto capítulo apresenta-se a metodologia CVFEM utilizada para a solução do problema da difusão de calor. Neste capítulo também é explicado como é realizado o acoplamento entre as equações de radiação e condução para os dois métodos (Radiosidades e Gebhart) apresentados para a troca de calor entre as superfícies. Este capítulo dedica-se também a explicar a implementação computacional e aos algoritmos estudados para a solução do problema radiativo-condutivo acoplado, com ênfase nos processos iterativos para a solução da não linearidade presente entre as equações.

O sexto capítulo é reservado para a apresentação dos resultados numéricos. Diversas configurações geométricas para a avaliação dos modelos do fator de forma foram utilizados. Aspectos como acurácia, sensibilidade, precisão e performance computacional são analisados. Também são apresentados resultados visando validar os algoritmos para a solução dos problemas radiativos-condutivos e analisar o efeito da influência da troca de calor por radiação em um problema tradicional de condução de calor.

Por fim, no sétimo capítulo são mencionadas as conclusões do presente estudo e recomendações para futuros trabalhos.

2 Caracterização do Problema

Neste capítulo apresentam-se o problema de estudo, seus fundamentos físicos e matemáticos e as definições necessárias para o entendimento dos desenvolvimentos deste trabalho.

O que será apresentado abaixo foi retirado de textos clássicos de transferência de calor como Incropera e De Witt (1992), Siegel e Howell (1993) e Modest (1993).

2.1 O Problema Radiativo-Condutivo

Como dito anteriormente, o presente trabalho objetiva-se na determinação da troca de calor, em regime permanente, entre superfícies delgadas, sem a presença de meio participante.

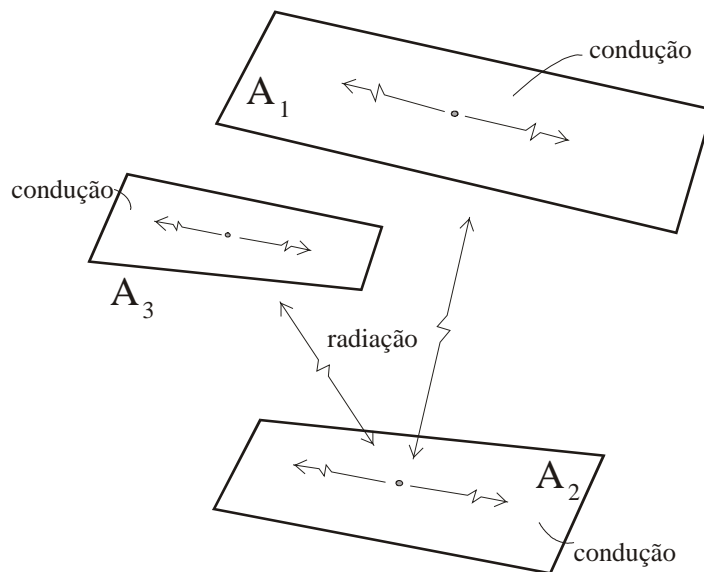


Figura 2.1 – Problema radiativo-condutivo

De acordo com a Fig.2.1, os fenômenos de interesse são a condução de calor bi-dimensional (com ou sem geração) no interior das superfícies, acoplada com a troca de calor radiativa entre elas. Visando a modelagem do problema radiativo, as superfícies serão admitidas como sendo difusas e cinzentas e a possibilidade de obstrução parcial ou total entre elas é levada em consideração.

A condução de calor é um fenômeno físico que está associado ao nível energético das moléculas que compõem um determinado meio. Este nível está associado ao movimento aleatório das moléculas, responsável pela transferência de energia das partículas de maior para menor nível energético. Este processo é também chamado de difusão de energia, e sempre ocorre na presença de um meio e de um gradiente de temperatura. Uma forma bastante ilustrativa de entender o fenômeno da condução está apresentado em Incropera e De Witt (1992).

A taxa com que a transferência de calor se propaga em um determinado meio é dado pela *Lei de Fourier*. Esta equação pode ser utilizada para calcular a quantidade de energia transferida neste meio por unidade de tempo, sendo expressa em termos do fluxo de calor perpendicular a uma superfície isotérmica (\vec{n}) de acordo com a seguinte expressão

$$q''_c = -k \cdot \frac{dT}{dn} \quad (2.1)$$

onde T é a temperatura do material e k a condutividade térmica, possuindo a unidade $W/m \cdot K$.

A condutividade térmica (k) é uma propriedade que proporciona uma indicação sobre a taxa de transferência de energia, que acontece pelo processo de difusão, e depende da estrutura física e molecular da matéria.

Considerando as placas da Fig. 2.1 meios bi-dimensionais homogêneos, podemos realizar o balanço de energia em um volume de controle elementar, considerando a parcela de energia que é transportada por difusão no interior deste meio e a parcela de energia que esta superfície recebe por radiação, de acordo com a Fig.2.2.

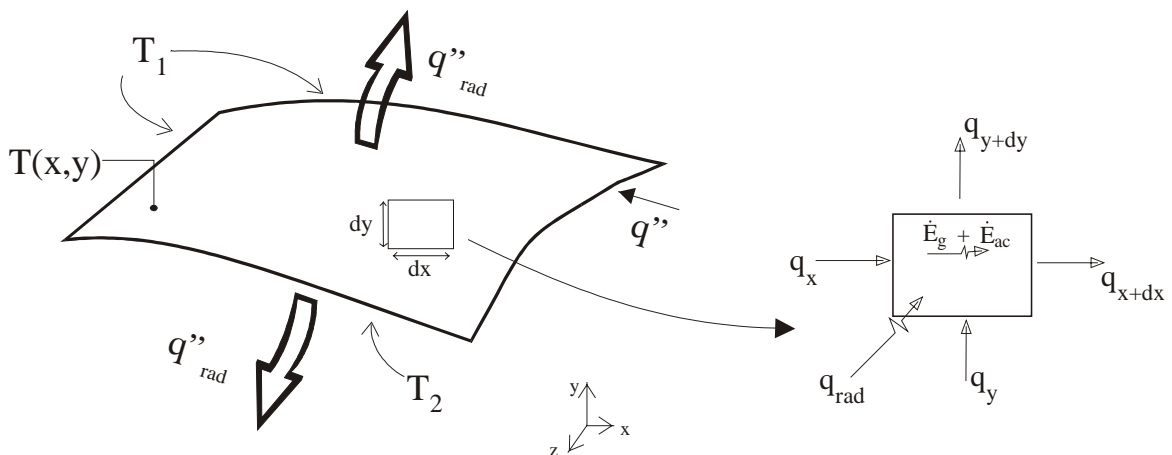


Figura 2.2 – Balanço de energia em um volume de controle elementar

O balanço de energia é dado por

$$\dot{E}_{entra} - \dot{E}_{sai} + \dot{E}_{gerada} = \dot{E}_{acumulada} \quad (2.2)$$

Empregando a Lei de Fourier [Eq.(2.2)], em um volume de controle de espessura δ [m] encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q}_{gerado} + \frac{q''_{radiação}}{\delta} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3)$$

onde ρ e c_p são a densidade e o calor específico do material, respectivamente. O termo \dot{q} [W/m³], representa o termo fonte da equação responsável pela geração ou sumidouro de calor e o termo $q''_{radiação}$ [W/m²] representa os fluxos de calor absorvidos-emitidos nas superfícies do volume de controle oriundos do fenômeno da radiação.

A Eq.(2.3) é a forma geral em coordenadas cartesianas da equação da transferência de calor que utilizaremos para tratar as superfícies em questão. Desprezando o termo transiente e unindo os termos de radiação e geração de calor em uma única parcela de fluxo incidente, esta equação resulta na expressão abaixo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q(T) = 0 \quad (2.4)$$

Esta é a equação de difusão de calor bi-dimensional em regime permanente, e será o objeto de estudo ao longo do texto. A contribuição dos termos radiativos está embutida no termo Q , e como será apresentado adiante, é função da temperatura. Este fato fornece uma forte não-linearidade à equação acima.

3 Fator de Forma

Neste capítulo apresenta-se diversos métodos e aproximações utilizadas para o cálculo do fator de forma entre superfícies difusas emitindo radiação uniforme. Será fornecida atenção especial para as rotinas e algoritmos utilizados à verificação de obstruções entre as superfícies. Os métodos aqui descritos serão utilizados para as análises comparativas realizadas ao longo do presente estudo.

3.1 Definição do Fator de Forma entre Superfícies Difusas

3.1.1 Fator de Forma entre dois Elementos de Área Infinitesimal

A obtenção da expressão do fator de forma entre dois elementos de área infinitesimal que possuem superfícies difusas, inicia-se considerando a quantidade de energia que é emitida pela superfície dA_1 e chega em dA_2 (Fig.3.1).

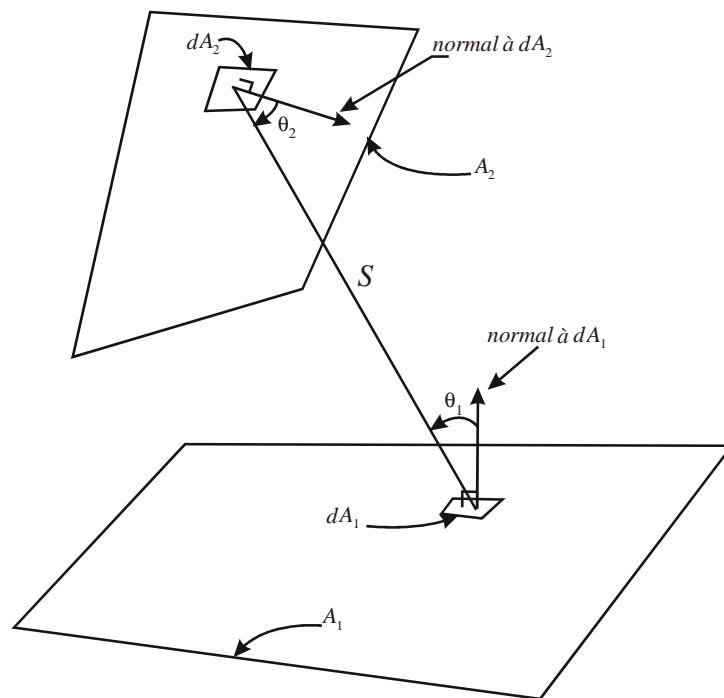


Figura 3.1– Troca radiativa entre dois elementos infinitesimais

Com auxílio do capítulo anterior, esta quantia de energia é representada por

$$dq_{d1-d2}(\lambda) = I_{\lambda,e,1}(\lambda) dA_1 \cos \theta_1 d\omega_1 \quad (3.1)$$

Analisando a Fig.3.1, temos que o ângulo sólido $d\omega_1$ é expresso por

$$d\omega_1 = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{S^2} \quad (3.2)$$

Substituindo a Eq.(3.2) na Eq.(3.1), obtemos

$$dq_{d1-d2}(\lambda) = \frac{I_{\lambda,e,1}(\lambda) dA_1 \cos \theta_1 dA_2 \cos \theta_2}{S^2} \quad (3.3)$$

O conceito do fator de forma entre duas superfícies infinitesimais (F_{d1-d2}) envolve fatores puramente geométricos e define-se como a *fração de energia incidente em dA_2 , proveniente de dA_1* . Esta expressão é obtida dividindo a Eq.(3.3) pela energia total proveniente de dA_1 , resultando em

$$F_{d1-d2} = \frac{I_{\lambda,e,1}(\lambda) dA_1 \cos \theta_1 dA_2 \cos \theta_2}{\pi I_{\lambda,e,1}(\lambda) dA_1 S^2} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi S^2} \quad (3.4)$$

O mesmo desenvolvimento poderia ser feito baseado na fração de energia que atinge dA_1 , proveniente de dA_2 obtendo-se o fator de forma da superfície dA_2 em relação a dA_1 .

3.1.2 Fator de Forma entre um Elemento de Área Infinitesimal e um Elemento de Área Finita

No caso de substituirmos o elemento dA_2 por um elemento de área A_2 , para obtermos a expressão do fator de forma entre um elemento de área infinitesimal e um elemento de área finita, devemos realizar a integração da Eq.(3.4) ao longo desta superfície. Esta operação nos fornece

$$F_{d1-2} = \int_{A_2} dF_{d1-d2} = \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 \quad (3.5)$$

3.1.3 Fator de Forma entre dois Elementos de Área Finita

Seguindo a mesma lógica, se a Eq. (3.5) for integrada ao longo de A_1 , obtemos a fração da energia que sai de A_1 e atinge A_2 (F_{1-2}). Assim, a expressão para F_{1-2} vale

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 dA_1 \quad (3.6)$$

A expressão acima é de extrema importância no cômputo das trocas radiativa entre superfícies, sendo de difícil cálculo quando superfícies com formas complexas estão envolvidas e existe a presença de obstruções. A avaliação da expressão acima de forma correta e precisa, representa uma grande etapa no cômputo da troca radiativa entre duas superfícies.

Como a parcela do fluxo de calor que chega em A_2 proveniente de A_1 é sempre menor ou igual a parcela que sai de A_1 , temos que

$$0 \leq F_{1-2} \leq 1 \quad (3.7)$$

3.2 Propriedades do Fator de Forma entre Superfícies Difusas

3.2.1 Regra da Soma

Consideremos agora a superfície A_1 em uma cavidade fechada, formada por N outras superfícies. Toda a energia que sai desta superfície será totalmente distribuída entre todas as outras, ou seja, não haverá parcela de energia perdida para fora da cavidade. Para satisfazer a conservação de energia devemos ter a soma do fator de forma da superfície A_1 para todas as outras superfícies da cavidade igual a unidade, ou seja

$$\sum_{j=1}^N F_{1-j} = 1 \quad (3.8)$$

3.2.2 Relação de Reciprocidade

Além da propriedade acima mencionada, de acordo com Siegel e Howell (1993), invertendo a ordem de integração da Eq.(3.6), é fácil provar que existe uma reciprocidade entre F_{12} e F_{21} dada por:

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \quad (3.9)$$

3.2.3 Relação de Adição

Consideremos agora a superfície A_2 composta por duas superfícies A_a e A_b . A energia proveniente de A_1 que atingiu A_2 é composta pela soma das parcelas que atingiram as superfícies A_a e A_b . Transportando isto para a nomenclatura do fator de forma temos

$$F_{1-2} = F_{1-a} + F_{1-b} \quad (3.10)$$

Esta expressão pode ser estendida para qualquer superfície compostas por N outras superfícies e, ao utilizar esta definição, algum cuidado deve ser tomado, pois o inverso nem sempre é verdadeiro.

3.2.4 Analogia de Nusselt

Uma outra característica importante do fator de forma é a chamada Analogia de Nusselt (Siegel e Howell, 1992). Considera-se um hemisfério unitário sobre um elemento de área dA_1 , como mostrado na Fig.3.2

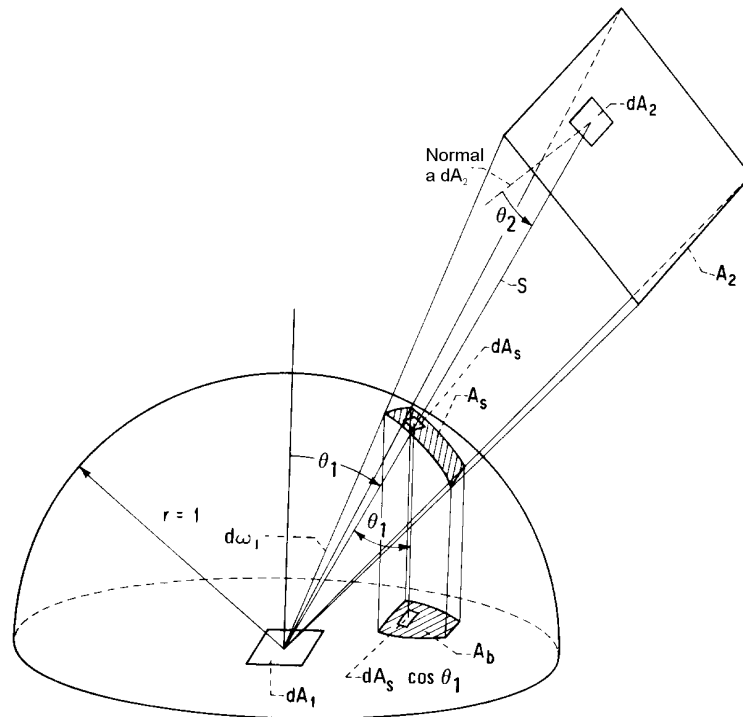


Figura 3.2– Analogia de Nusselt (Siegel e Howell, 1992)

Sabemos que o fator de forma de uma área infinitesimal para um área finita (A_2) é dado por

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,839 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:57 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 155 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

$$F_{d1-2} = \frac{1}{\pi} \int_{A_2} \cos \theta_1 \frac{\cos \theta_2}{S^2} dA_2 = \frac{1}{\pi} \int_{A_1} \cos \theta_1 d\omega_1 \quad (3.11)$$

Sabendo também que $d\omega_1$ (ângulo sólido) representa a projeção de dA_2 na superfície do hemisfério, obtemos

$$d\omega_1 = \frac{\cos \theta_2 dA_2}{S^2} = \frac{dA_s}{r^2} = dA_s \quad (3.12)$$

onde r representa o raio unitário. Podemos portanto, escrever o fator de forma utilizando a Eq.(3.11) da seguinte maneira

$$F_{d1-2} = \frac{1}{\pi} \int_{A_s} \cos \theta_1 dA_s \quad (3.13)$$

O fator $\cos \theta_1 dA_s$ equivale a projeção de dA_s na base do hemisfério. Se realizarmos a integração de $\cos \theta_1 dA_s$, obteremos a projeção de A_s na base do hemisfério, chamada aqui de A_b . A equação acima pode então ser escrita como

$$F_{d1-2} = \frac{1}{\pi} \int_{A_s} \cos \theta_1 dA_s = \frac{A_b}{\pi} \quad (3.14)$$

Analisando a Eq.(3.14) podemos concluir que se conhecermos o valor da área projetada na base do hemisfério (A_b) de uma superfície A_2 , podemos facilmente determinar o fator de forma F_{d1-2} . Alguns métodos numéricos, como o *Hemi-Cube*, baseiam-se nesta analogia para a determinação do fator de forma entre superfícies.

3.2.5 Acurácia e Reciprocidade

De posse de todas as propriedades e definições sobre fator de forma é importante realizarmos algumas observações sobre a precisão envolvida nos métodos numéricos que serão apresentados ao longo deste capítulo e como eles utilizam a relação de reciprocidade para o cálculo dos fatores de forma.

Métodos probabilísticos como o Monte Carlo (Pattanaik *et al.*, 1992), utilizam estimativas para conhecer a precisão do cálculo de F_{1-2} . A maioria dos outros métodos tende a utilizar a lei da soma (verificando se a soma resulta em um valor unitário) ou da reciprocidade (comparando os valores de $A_1 F_{1-2}$ com $A_2 F_{2-1}$) para esse fim. Essa primeira comparação resulta em grande incerteza, pois embora o somatório dos fatores de forma possa resultar em um valor unitário, não se asseguram valores individuais de F_{1-2} . A utilização da lei da

reciprocidade representa uma medida muito mais confiável, mas como dito anteriormente, é necessário que ambos os valores de F_{1-2} e F_{2-1} sejam calculados, processo que é computacionalmente caro.

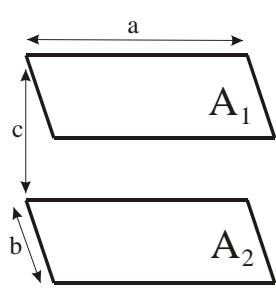
Atualmente, a maioria dos sistemas computacionais desenvolvidos para o cálculo do fator de forma utilizam a lei da reciprocidade para diminuir o número de processamentos a serem realizados e utilizam algumas expressões analíticas, desenvolvidas para configurações geométricas simples, para a verificação de sua precisão. Assim, observa-se que atualmente não existe nenhuma metodologia numérica absoluta que garanta a precisão do cálculo do fator de forma considerando a presença de obstruções.

3.3 Métodos Analíticos para o Cálculo do Fator de Forma

Para um grupo reduzido de configurações geométricas, a integração da Eq.(3.6) pode ser realizada analiticamente. Estas soluções analíticas, mesmo com suas limitações de configurações geométricas, são amplamente utilizadas para validação e entendimento do comportamento dos métodos numéricos. Nesta seção somente exemplos de alguns casos comumente utilizados para comparação de métodos numéricos serão apresentados.

3.3.1 Integração Direta

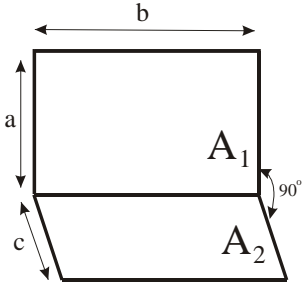
Para o caso de geometrias simples, realizando a integração direta da Eq.(3.6), algumas expressões analíticas para o fator de forma podem ser obtidas. Apesar do resultado nos fornecer uma forma fechada para a sua avaliação, as expressões resultantes são em geral extensas. Os dois exemplos a seguir, apresentados nas Figs. 3.3 e 3.4 ilustram isto:



$$X = \frac{a}{c}, Y = \frac{b}{c}$$

$$F_{1-2} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \ln \left[\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2} \right]^{\frac{1}{2}} + X\sqrt{1+Y^2} \tan^{-1} \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right. \\ \left. + Y\sqrt{1+X^2} \tan^{-1} \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} - X \tan^{-1} X - Y \tan^{-1} Y \right\}$$

Figura 3.3– Fator de forma entre duas placas paralelas (Siegel e Howell, 1992)



$$X = \frac{a}{b}, Y = \frac{b}{c}$$

$$F_{1-2} = \frac{1}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{1}{Y} + \frac{Y}{2} \ln \frac{Y^2(1+X^2+Y^2)}{(1+Y^2)(X^2+Y^2)} - \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}} \right]$$

Figura 3.4– Fator de forma entre duas placas perpendiculares (Siegel e Howell, 1992)

A seguir, na Fig.3.5, é também apresentado um exemplo que será utilizado ao longo deste capítulo. A simplicidade desta fórmula é oriunda do fato de envolver um elemento de área infinitesimal.



$$F_{d1-2} = \frac{r^2}{r^2 + h^2}$$

Figura 3.5– Fator de forma entre um elemento infinitesimal e um disco de raio r (Siegel e Howell, 1992)

3.3.2 Integral de Contorno

Uma ferramenta bastante útil na avaliação do fator de forma é a utilização do teorema de Stokes para a redução das integrais de área, encontradas na expressão do fator de forma, em integrais de contorno.

Sejam P , Q e R quaisquer funções duplamente diferenciáveis em x , y , e z . O teorema de Stokes, utilizado em três dimensões, fornece a seguinte relação entre a integral na superfície de área A e a integral de P , Q e R no contorno C desta superfície, conforme Fig.3.6.

$$\oint_C (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_A \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \delta \right] dA \quad (3.15)$$

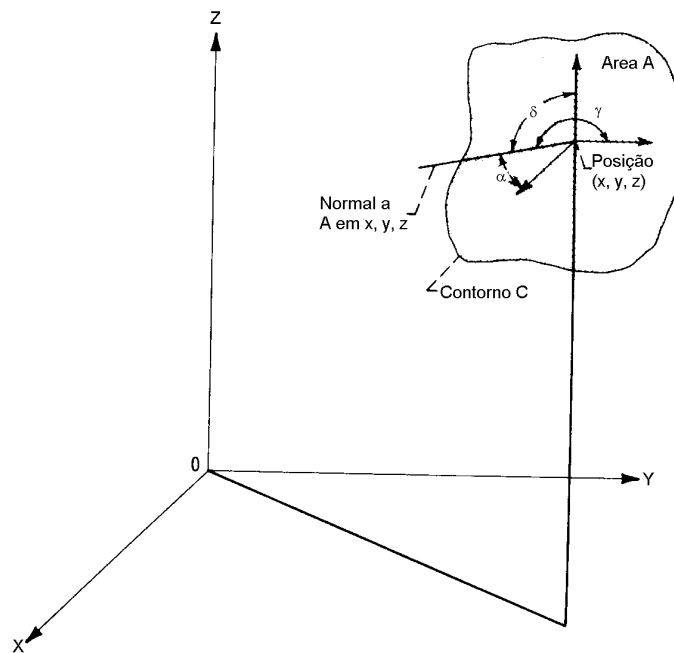


Figura 3.6– Entidades geométricas envolvidas no Teorema de Stokes (Siegel e Howell, 1992)

Representando adequadamente as funções P , Q e R , pode-se utilizar esta técnica nas integrais presentes na Eq.(3.6), resultando em

$$A_1 F_{12} = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1 C_2} (\ln S dx_2 dx_1 + \ln S dy_2 dy_1 + \ln S dz_2 dz_1) \quad (3.16)$$

onde S é a distância entre as superfícies. Maiores detalhes podem ser obtidos em Siegel e Howell (1992).

Utilizando este método, Schroder e Hanrahan (1993) obtiveram uma complexa expressão fechada para o fator de forma entre dois polígonos sem obstrução posicionados arbitrariamente no espaço.

3.4 Métodos Numéricos para o Cálculo do Fator de Forma

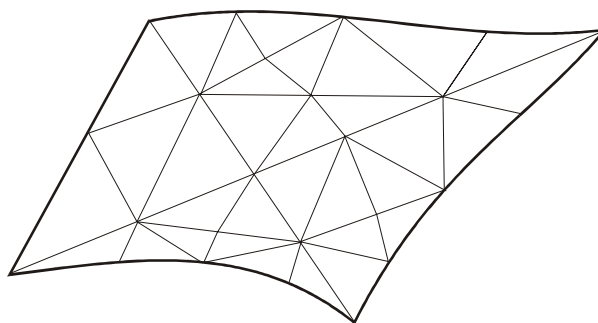
A determinação do fator de forma entre duas superfícies é uma simples tarefa de avaliar uma integral dupla. Quando não existem obstruções e entre superfícies de geometrias simples é possível obter uma solução analítica. Quando as geometrias são complexas, mas sem obstruções, a avaliação numérica da integral é, conceitualmente, um processo simples, onde a precisão e conseqüentemente o tempo de computação são fatores importantes. Quando

existem obstruções, os algoritmos complicam-se consideravelmente em função da pesquisa necessária para a verificação de superfícies obstrutoras e nas determinações das regiões de sombra.

As seções seguintes fornecem um apanhado sobre algumas técnicas numéricas empregadas no cálculo do fator de forma e descrevem alguns algoritmos utilizados para a diminuição das checagens destas obstruções e para a determinação das regiões obstruídas.

3.4.1 Aproximações e Hipóteses Utilizadas

Como todo método numérico, o primeiro passo para o cálculo do fator de forma, consiste na discretização dos elementos geométricos envolvidos. Assim, cada superfície geométrica em questão é subdividida em superfícies menores e nestas são calculadas os fatores de forma e a troca líquida radiativa. Este processo denomina-se geração da *malha radiativa*.



(malha radiativa)

Figura 3.7– Discretização utilizada para o cálculo do problema radiativo

No presente estudo, cada superfície geométrica foi discretizada em triângulos (ver Fig.3.7, utilizando a técnica descrita em Maliska Jr. (2001). Como será mais detalhado adiante, uma vez discretizadas as superfícies e os triângulos resultantes utilizados para o cálculo do fator de forma e das trocas de calor, estamos assumindo a hipótese de que as propriedades e intensidades radiativas nestes triângulos são constantes. Obviamente, quanto menores forem estes triângulos, ou seja, quanto mais refinada for a malha radiativa, melhor será esta aproximação.

A partir de agora, ao longo deste texto, quando utilizarmos o termo superfície ou elementos, deve ficar claro que estamos tratando das superfícies triangulares oriundas do processo de discretização. Muitas vezes, com fins didáticos e ilustrativos, os desenhos aqui

mostrados apresentam superfícies divididas em quadrados. Nestas ocasiões, as hipóteses em questão serão válidas para todos os tipos de elemento (quadrados ou triângulos). Caso isto não seja verdadeiro, as observações serão devidamente apresentadas.

Uma outra hipótese comumente utilizada por alguns métodos numéricos para o cálculo do fator de forma entre duas superfícies é a de se aproximar a Eq.(3.6) utilizando a Eq.(3.5), ou seja, aproxima-se o valor do fator de forma entre duas superfícies pelo fator de forma entre um elemento de área infinitesimal e uma superfície. Assumindo-se algumas hipóteses, esta condição pode ser aplicada. Reorganizando estas duas equações temos que

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 dA_1 = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} F_{d1-2} dA_1 \quad (3.17)$$

Analisando a Eq.(3.17), podemos verificar que a função da integral externa é a de realizar a média na área entre todos os elementos infinitesimais dA_1 e a área A_2 . Assim, aproximando F_{1-2} por F_{d1-2} , estaremos assumindo a hipótese de que F_{d1-2} é constante ao longo de A_1 , ou seja

$$F_{1-2} \approx F_{d1-2} \quad (3.18)$$

Geralmente, o centro do elemento discretizado é utilizado como ponto representativo para ser utilizado por esta aproximação. Examinando a Eq.(3.17), a hipótese acima descrita é bastante válida se duas condições forem satisfeitas. A primeira condição diz que a distância entre as duas superfícies (S), deve ser muito maior que o tamanho médio do elemento A_1 . Esta hipótese é chamada de *hipótese da proximidade* (Baum *et al.* 1989), e é válida se S^2 não variar muito ao longo de A_1 . Como a dependência do fator de forma com a distância é não linear, erros surgirão quando a distância varia muito ao longo de A_1 . Como um exemplo, sempre que duas superfícies forem adjacentes e a distância S for pequena em comparação ao tamanho da superfície em questão (A_1), a hipótese que F_{d1-2} é representativo de F_{1-2} é violada, como pode ser visto na Fig.3.8.

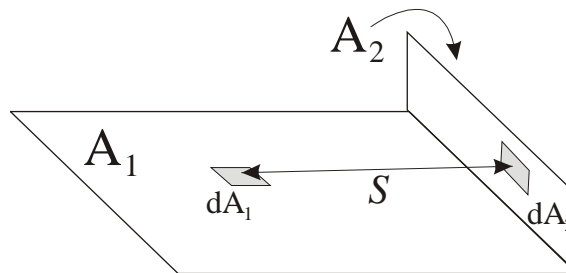


Figura 3.8– Violação da hipótese da proximidade

Por outro lado, se agora estivermos interessados no cálculo do fator de forma F_{2-1} , analisando a Fig.3.8 podemos verificar que a utilização da hipótese acima poderá fornecer boas aproximações, pois a distância S entre os centros das superfícies é grande comparada com o tamanho médio da superfície A_2 . Assim, como a variação de F_{d2-1} ao longo da superfície A_2 é menor comparada com a variação F_{d1-2} ao longo da superfície A_1 , a aproximação de F_{2-1} por F_{d2-1} será mais bem avaliada do que F_{1-2} por F_{d1-2} .

Uma outra aproximação comumente assumida é que a visibilidade da superfície A_2 é constante quando vista da superfície A_1 . Esta hipótese é chamada de *hipótese da visibilidade* (Baum *et al.* 1989).

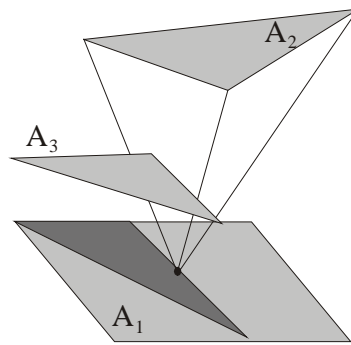


Figura 3.9– Violação da hipótese da visibilidade

Analisando a Fig.3.9, o centro da superfície A_1 não será representativo da visibilidade que A_1 possui de A_2 .

Ambas as hipóteses até agora apresentadas, assumem que F_{d1-2} seja constante ao longo de A_1 , sendo assim, é fácil perceber que, à medida que o tamanho de A_1 cresce, a chance de violações nas hipóteses da proximidade e visibilidade também cresce (ver Fig.3.10). Portanto, reduzindo o tamanho destas superfícies, teremos maiores chances de estarmos utilizando estas aproximações corretamente.

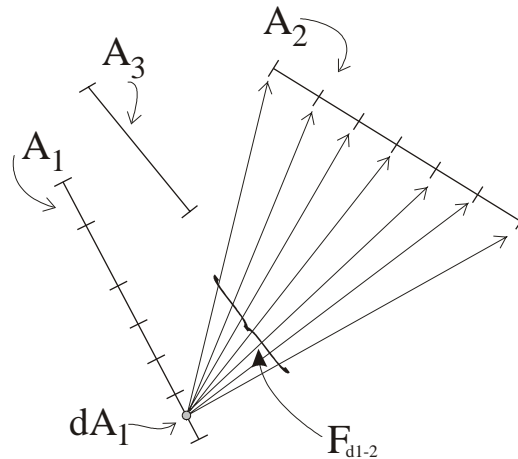


Figura 3.10– Aproximação F_{1-2} por F_{d1-2}

Se agora utilizarmos um outro nível de subdivisões no interior dos elementos oriundos da discretização, ou seja, um refinamento desta malha, obteremos melhores resultados. Considerando a superfície A_1 subdividida em M sub-elementos, a Eq.(3.17) resulta em

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \sum_{u=1}^M F_{d1,u-2} \Delta A_{1,u} \quad (3.19)$$

Percebe-se que com a subdivisão dos elementos discretizados e a utilização da expressão acima, estamos avaliando numericamente a integral externa da expressão do fator de forma, resultando em um valor mais preciso e menos sujeito a erros de visibilidade.

Variando o número de M sub-elementos na superfície A_1 , teremos controle sobre a precisão do método e também do tempo computacional. A subdivisão uniforme gera um tempo computacional elevado e muitas vezes cria sub-elementos desnecessários, sem fornecer qualquer melhoria na precisão. Pode-se utilizar um procedimento mais adequado, como o descrito por Sillion e Puech (1994), aonde os elementos discretizados são divididos (refinados) adaptativamente, somente nas regiões que violam as hipóteses acima, concentrando acurácia e otimizando o tempo de processamento.

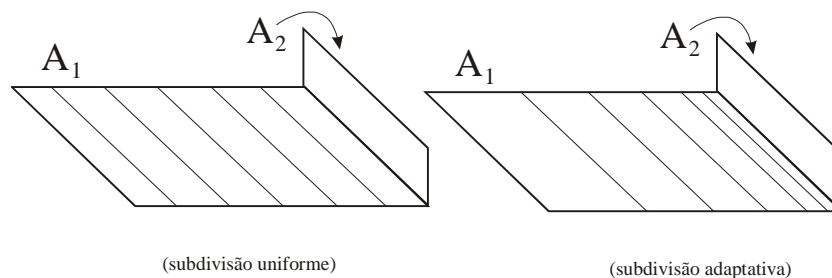


Figura 3.11– Redução de erros devido a violação da hipótese da proximidade

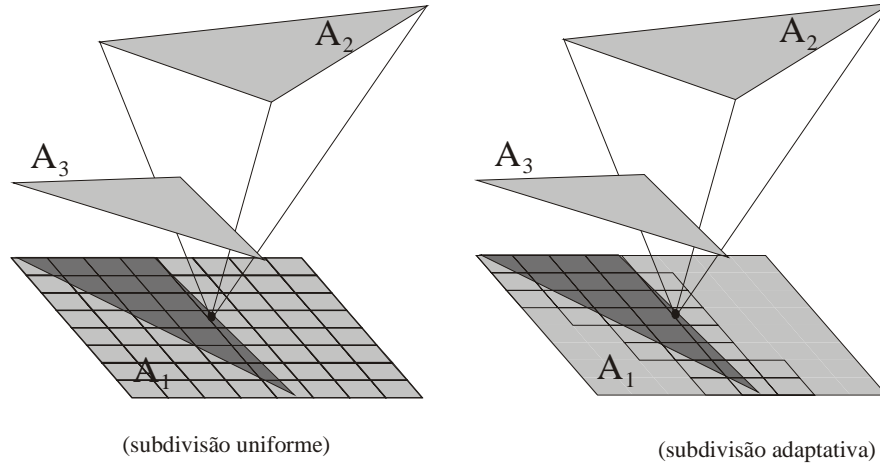


Figura 3.12– Redução de erros devido a violação da hipótese da visibilidade

Outro bom exemplo da utilização de malhas adaptativas para o cálculo do fator de forma é o trabalho de Saltiel e Kolibal (1993), aonde utiliza-se refinamentos do tipo p e h (comumente utilizados em elementos finitos), e critérios de erro definidos pelo usuário para a obtenção de fatores de forma mais precisos.

3.4.2 Dupla Discretização Utilizando Aproximação de Disco

O clássico método da dupla discretização realiza a avaliação numérica da expressão do fator de forma F_{d1-2} entre um elemento de área infinitesimal e uma superfície finita. Este método consiste na subdivisão da superfície A_2 em N elementos de área $\Delta A_{2,v}$. De posse das posições e das áreas destes elementos, calcula-se cada fator de forma $\Delta F_{d1-2,v}$ entre a superfície dA_1 e o elemento $\Delta A_{2,v}$. Para o cômputo final da Eq.(3.5), é realizada a soma destes $\Delta F_{d1-2,v}$. As seguintes expressões esclarecem este procedimento.

$$F_{d1-2} = \int_{A_2} dF_{d1-2} = \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 = \sum_{v=1}^N \int_{A_{2,v}} \frac{\cos \theta_{1,v} \cos \theta_{2,v}}{\pi S^2} dA_{2,v} \quad (3.20)$$

$$F_{d1-2} = \sum_{v=1}^N \Delta F_{d1-2,v} \quad (3.21)$$

onde,

$$\Delta F_{d1-2,v} = \int_{A_{2,v}} \frac{\cos \theta_{1,v} \cos \theta_{2,v}}{\pi S^2} dA_{2,v} \quad (3.22)$$

Assumindo a hipótese de que $\Delta A_{2,v}$ é pequeno quando comparado com o termo da distância (S^2), podemos aproximar a Eq.(3.22) por

$$\Delta F_{d1-2,v} \approx \frac{\cos \theta_{1,v} \cos \theta_{2,v}}{\pi S^2} \Delta A_{2,v} \quad (3.23)$$

o que resulta em

$$F_{d1-2} \approx \sum_{v=1}^N \frac{\cos \theta_{1,v} \cos \theta_{2,v}}{\pi S^2} \Delta A_{2,v} \quad (3.24)$$

Analisando a expressão acima, podemos verificar que caso haja violação da hipótese, ou seja, se a distância S for pequena comparada com o tamanho de $\Delta A_{2,v}$, o valor de F_{d1-2} tenderá ao infinito à medida que o valor de S for diminuindo e o tamanho de $\Delta A_{2,v}$ for crescendo. Assim, para evitar valores fisicamente irreais, a superfície A_2 deverá ser dividida em um número muito grande de elementos, resultando em um aumento proporcional do tempo computacional.

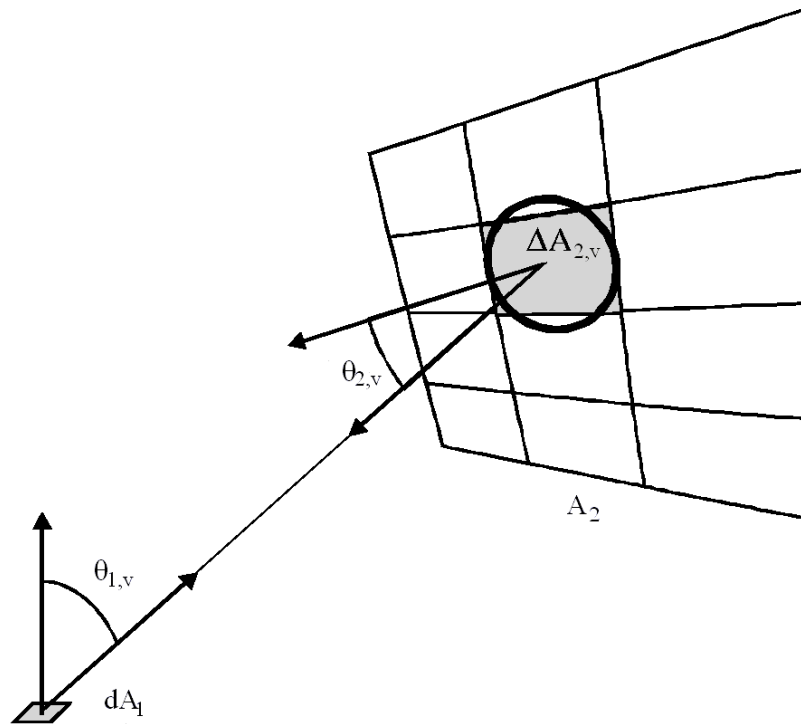


Figura 3.13– Elementos geométricos envolvidos no método da dupla discretização com a aproximação de disco

Visando reduzir a necessidade de se utilizar um grande número de elementos na divisão da superfície A_2 , Wallace *et al.* (1989), introduziram a chamada *aproximação de disco*. Eles

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,840 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:57 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 155 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

sugerem que $\Delta A_{2,v}$ seja aproximado por um simples elemento geométrico com a mesma área, para o qual uma fórmula simples e exata do fator de forma seja conhecida. Em virtude da simplicidade, a utilização da expressão contida na Fig.3.5 é recomendada. Esta expressão refere-se ao fator de forma de um elemento infinitesimal e um círculo paralelo de raio r , e pode ser facilmente complementada para levar em consideração as diferentes orientações espaciais que estes dois entes geométricos possam vir a ter. Isto é realizado multiplicando os cossenos dos ângulos formados pelas normais das superfícies com o vetor distância entre elas.

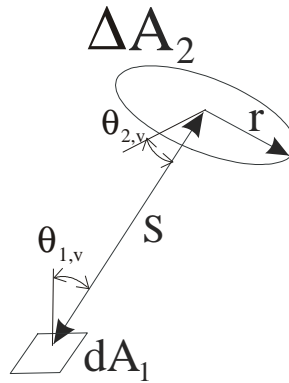


Figura 3.14– Fator de forma entre um elemento infinitesimal e um disco posicionado arbitrariamente no espaço

A seguinte expressão é resultado desta aproximação (ver Fig.3.5)

$$\Delta F_{d1-2,v} = \cos \theta_{1,v} \cos \theta_{2,v} \frac{r^2}{r^2 + S^2} \quad (3.25)$$

Multiplicando e dividindo a expressão acima por π , temos

$$\Delta F_{d1-2,v} = \cos \theta_{1,v} \cos \theta_{2,v} \frac{\pi r^2}{\pi r^2 + \pi S^2} = \frac{\cos \theta_{1,v} \cos \theta_{2,v}}{\pi S^2 + \Delta A_{2,v}} \Delta A_{2,v} \quad (3.26)$$

Note que a presença de $\Delta A_{2,v}$ no denominador previne o problema de termos valores que tendem ao infinito, ou seja $\Delta F_{d1-2,v}$ maiores que 1. Isto é facilmente verificado, pois quando $S \rightarrow 0$, $\Delta F_{d1-2,v} \rightarrow \cos \theta_{1,v} \cos \theta_{2,v}$ e por outro lado quando $\Delta A_{2,v} \rightarrow 0$, $\Delta F_{d1-2,v}$ se aproxima de seus valores exatos. Utilizando esta aproximação, fatores de forma com excelente precisão podem ser atingidos aumentando o número de elementos $\Delta A_{2,v}$. Somando os valores de cada $\Delta F_{d1-2,v}$, temos a seguinte expressão para a F_{d1-2}

$$F_{d1-2} = \sum_{v=1}^N \frac{\cos \theta_{1,v} \cos \theta_{2,v}}{\pi S^2 + \Delta A_{2,v}} \Delta A_{2,v} \quad (3.27)$$

Na implementação numérica da expressão acima utiliza, após a discretização da superfície A_2 , utilizam-se técnicas conhecidas como *ray-tracing* (Foley *et al.*, 1990), amplamente difundidas na comunidade de computação gráfica. A versão desta técnica implementada aqui neste trabalho não dispõe de nenhum algoritmo de aceleração, e consiste em emitir um raio do elemento de superfície dA_1 em direção a $\Delta A_{2,v}$. Durante este processo, verificações são realizadas envolvendo possíveis superfícies para a checagem de obstrução. Este passo consiste na simples verificação da intersecção do raio emitido com as demais superfícies do problema. Se não existe obstrução a soma correspondente a $\Delta A_{2,v}$ é computada. Caso contrário, a mesma é descartada e passa-se para o elemento seguinte. Visando a diminuição deste número de checagens por superfícies obstrutoras, a implementação computacional deste método, durante este estudo, utilizou os algoritmos que serão descritos na seção 3.4.5.

A violação da visibilidade significa que a visão do centro do elemento infinitesimal dA_1 não é representativa do elemento $\Delta A_{2,v}$. Para diminuir este erro podemos aproximar a integral externa da expressão do fator de forma, dividindo agora a superfície A_1 em M elementos e utilizando a Eq.(3.19), resultando em

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \sum_{u=1}^M F_{d1-2} \Delta A_{1,u} = \frac{1}{A_1} \sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N \delta_{u,v} \frac{\cos \theta_{1,uv} \cos \theta_{2,uv}}{\pi S^2 + \Delta A_{2,v}} \Delta A_{2,v} \Delta A_{1,u} \quad (3.28)$$

A técnica que utiliza a equação acima apresentada é conhecida como *dupla discretização com aproximação de disco*, em virtude de sua similaridade com a expressão analítica do fator de forma. O termo $\delta_{u,v}$ foi adicionado para representar a visibilidade. Se dois elementos se vêem, ele vale 1, caso contrário, o seu valor é 0.

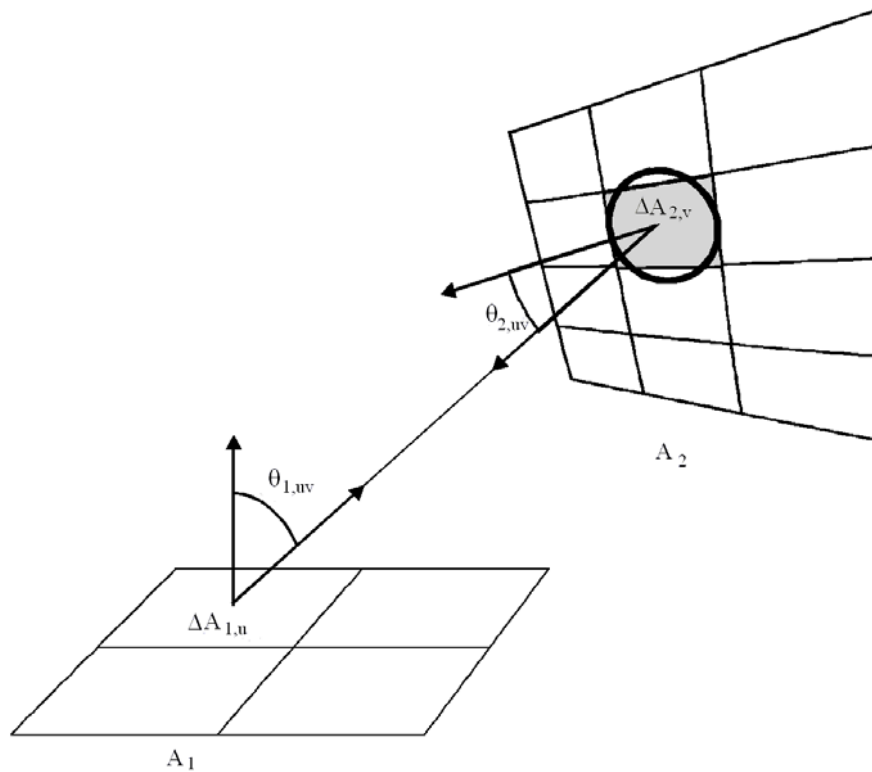


Figura 3.15– Dupla discretização com a aproximação de disco

A rotina computacional para a implementação desta técnica é apresentada de maneira simples para dois elementos (A_1 e A_2) no diagrama contido na Fig.3.16.

Uma das principais vantagens deste método é a facilidade com que ele pode ser implementado para utilizar discretizações adaptativas, reduzindo os erros nas suas aproximações. Obviamente, o mesmo pode ser atingido utilizando-se um refinamento uniforme, mas utilizando uma malha adaptativa pode-se otimizar o tempo computacional necessário com um ganho efetivo na precisão, refinando mais em elementos mais críticos. Por outro lado, em virtude deste método comumente necessitar de um número elevado de elementos nas superfícies envolvidas, quando o mesmo não utiliza técnicas de aceleração para o processamento dos raios, ele se apresenta lento computacionalmente quando comparado com os outros métodos. Este fato será verificado ao longo deste trabalho.

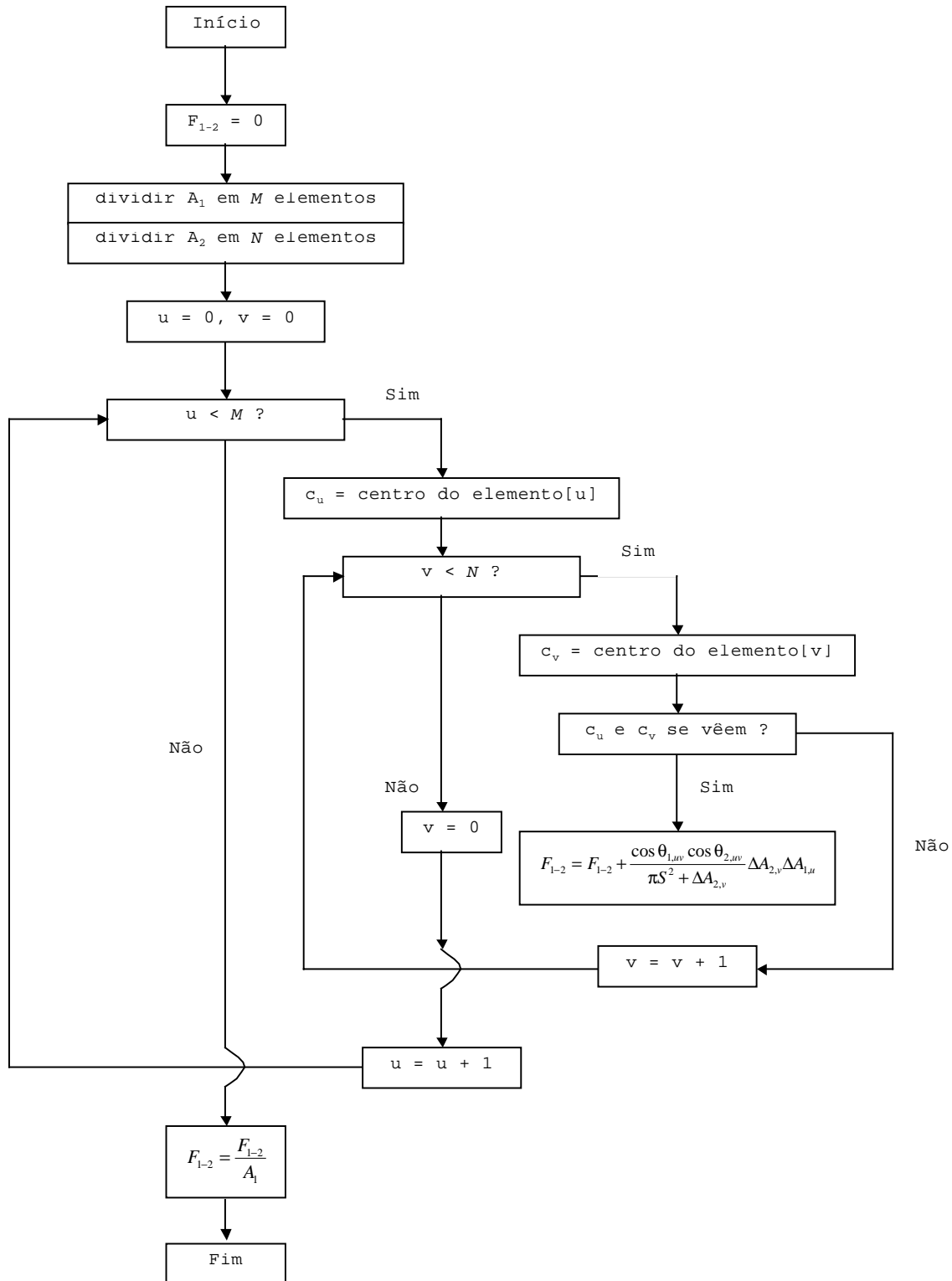


Figura 3.16– Algoritmo do método da dupla discretização com a aproximação de disco

3.4.3 Hemi-Cube

O método do Hemi-Cube, desenvolvido por Cohen e Greenberg (1985), é diretamente derivado da Analogia de Nusselt apresentada na seção 3.2.4. Em virtude dos métodos baseados na Analogia de Nusselt possuírem a mesma abordagem, eles são também classificados como métodos de projeção e seu entendimento fica fácil quando observamos a Fig.3.17.

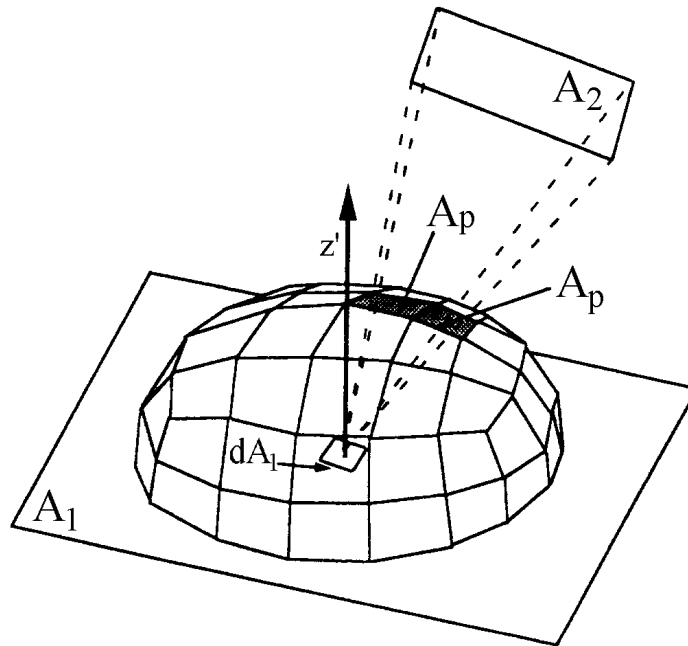


Figura 3.17– Implementação numérica da analogia de Nusselt

A primeira etapa destes métodos consiste na criação de um novo sistema coordenado posicionado no centro da superfície da superfície A_1 e um novo eixo (z') normal a esta superfície. Assim, somente superfícies que estão acima do plano $z'=0$ são consideradas, pois as que estão abaixo dela possuem fator de forma nulo. Após isto, divide-se o hemisfério da Fig.3.2 em um determinado número de sub-elementos denominados *pixels*, e que são projetados em pequenas áreas da base. À medida que uma superfície A_2 , para o qual se deseja calcular o fator de forma, cobre um determinado conjunto de *pixels*, utilizando-se a Eq.(3.14) calcula-se o fator de forma somando as áreas projetadas pelos *pixels* que são cobertos por esta superfície. Se existir casos onde uma superfície A_3 cobre o mesmo *pixel* já coberto por outra, é então verificada a distância de cada superfície até o centro da superfície considerada, sendo creditado o fator de forma àquele que possuir menor distância.

A implementação computacional destes métodos apresentaram algumas falhas. Dentre elas pode-se citar o fato de que a projeção de elementos na superfície e posterior projeção na base, em geral, fornece elementos com contornos muito curvos e suas áreas são de difícil determinação. Assim, para a obtenção destes valores com precisão é necessário a utilização de um número muito grande de *pixels*.

Visando resolver esta problema, em 1985, Cohen e Greenberg introduziram o conceito do Hemi-Cubo. Como pode ser visto na Fig.3.18, este método baseia-se na utilização de metade de um cubo posicionado no centro da superfície de onde se deseja determinar o fator de forma. Como a superfície do hemisfério, a superfície do cubo também é dividida em *pixels*, assim, cada uma das cinco faces deste hemi-cubo é uniformemente discretizada em elementos quadrados (*pixels*) de tamanho ΔA .

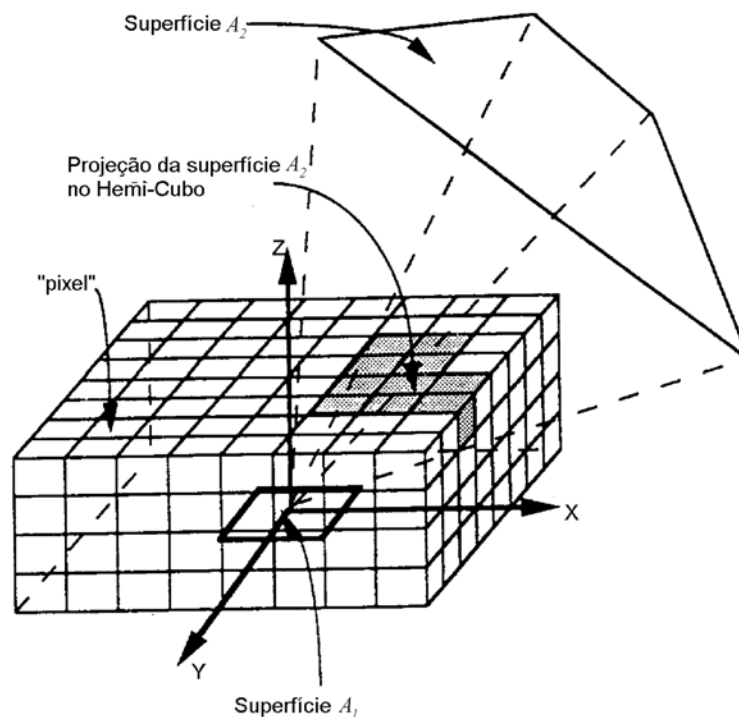


Figura 3.18– O Hemi-Cubo

Visando a aceleração do método, pode-se utilizar um hemi-cubo de tamanho fixo. Desta maneira, o fator de forma correspondente a cada *pixel* com relação ao centro, de fácil determinação, pode se encontrar previamente calculado e armazenado, fazendo que o seu cálculo não seja mais necessário ao longo do problema. Se ΔA é pequeno comparado com o tamanho do hemi-cubo, isto é, se a resolução do hemi-cubo é suficiente, o valor deste ΔF

pode ser aproximado pela expressão do fator de forma entre dois elementos infinitesimais, dada por

$$\Delta F = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} \Delta A \quad (3.29)$$

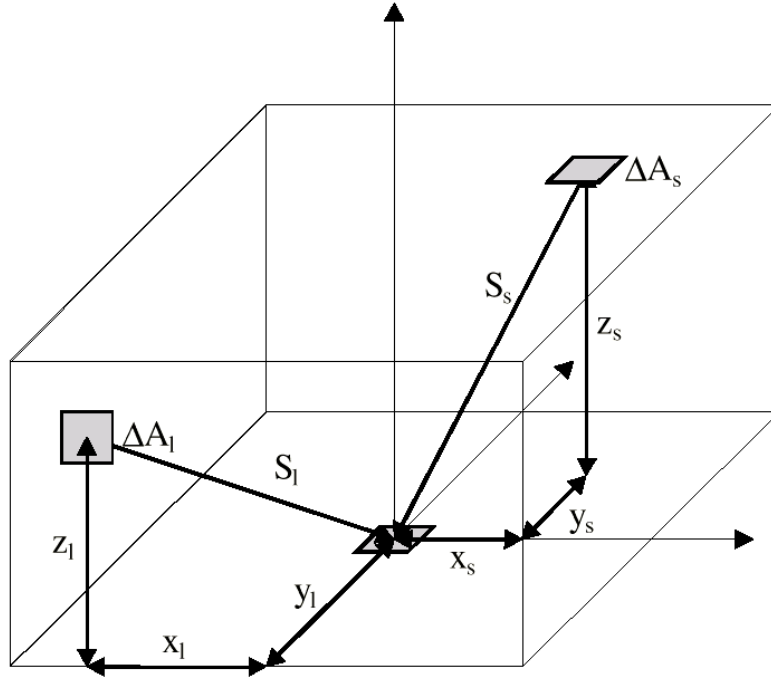


Figura 3.19– Pixels das faces laterais e superior

Devido a simetria, somente um quarto da face superior e um oitavo das faces laterais necessita ser calculado e armazenado. Para estes *pixels* temos

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ e} \quad (3.30)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{z}{S} \quad (3.31)$$

Para a face superior, com z constante, temos

$$\cos \theta_2 = \frac{z_s}{S_s}, \text{ e} \quad (3.32)$$

$$\Delta F_s = \frac{z_s^2}{\pi S_s^4} \Delta A_s = \frac{z_s^2}{\pi(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2)^2} \Delta A_s \quad (3.33)$$

Analogamente, na face lateral

$$\cos \theta_2 = \frac{y_l}{S_l}, \text{ e} \quad (3.34)$$

$$\Delta F_s = \frac{y_l z_l}{\pi S_l^4} \Delta A_l = \frac{y_l z_l}{\pi(x_l^2 + y_l^2 + z_l^2)^2} \Delta A_l \quad (3.35)$$

Da definição do fator de forma sabemos também que se duas superfícies distintas dispostas aleatoriamente no espaço, quando projetadas com relação a um centróide, cobrirem a mesma área de um hemisfério (Fig.3.20), estas possuirão o mesmo ângulo sólido e conseqüentemente, o mesmo fator de forma.

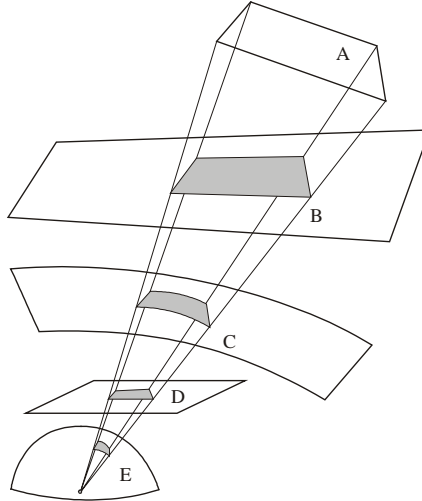


Figura 3.20– Superfícies com fatores de forma idênticos

De posse deste conceito, cada *pixel* de cada face deste hemi-cubo, possui um ângulo sólido determinado pela projeção da superfície do *pixel* em um hemisfério unitário. Se uma determinada superfície A_2 for projetada nas superfícies deste hemi-cubo e esta projeção cobrir um determinado número de *pixels*, o ângulo sólido resultante desta superfície será a soma do ângulo sólido dos *pixels* cobertos pela sua projeção. Conseqüentemente, utilizando a relação de adição, apresentada na seção 3.2.1, o seu fator de forma pode ser aproximado pela soma dos fatores de forma dos *pixels* cobertos. Assim, o fator de forma entre uma superfície A_1 e uma superfície A_2 pode ser aproximado pela expressão entre um elemento infinitesimal e uma área finita, resultando em

$$F_{d1-2} = \sum_{q \in P_2} \Delta F_q \quad (3.36)$$

onde P_2 é o conjunto de *pixels* cobertos pela projeção de A_2 .

Esta aproximação é baseada em uma simplificação chamada de *hipótese do falseamento* (*aliasing*). Esta simplificação assume que a projeção de uma superfície visível nas faces do hemi-cubo é precisamente avaliada pelas áreas dos *pixels* cobertos em um hemi-cubo de resolução finita. É sabido, entretanto, que alguns problemas sempre surgirão, pois a discretização finita e uniforme das faces do hemi-cubo é incapaz de captar corretamente todos os contornos que podem surgir. Estes erros são conhecidos como *erros de falseamento* e eles podem vir a superestimar ou subestimar os valores do fator de forma, conforme mostrado na Fig.3.21.

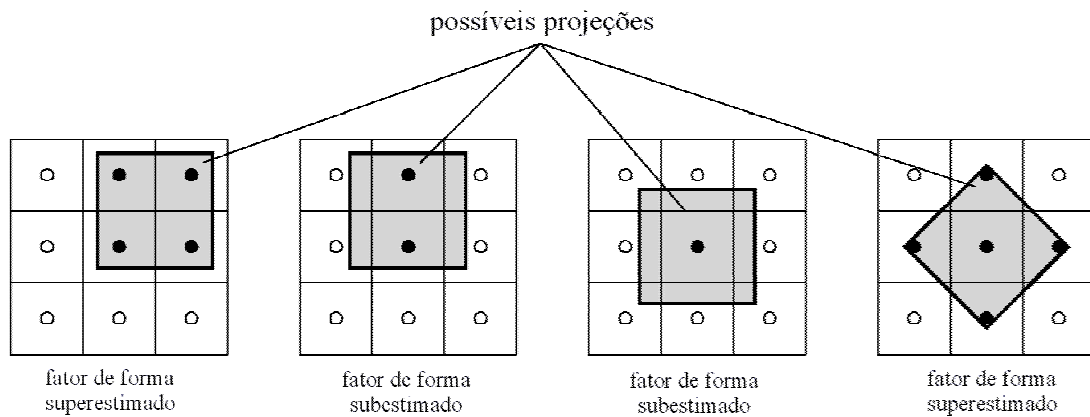


Figura 3.21– Violação da hipótese do falseamento

Erros de falseamento são reduzidos com o aumento da resolução do hemi-cubo, resultando também em um aumento do tempo de processamento. Intuitivamente, a escolha da resolução adequada de um hemi-cubo depende do número de superfícies envolvidas $[O(N)]$. Deve-se também levar em consideração o formato geométrico destas superfícies e o fato de que superfícies mais próximas são mais propícias a este tipo de problema do que as mais afastadas, pois em geral, possuem maior área projetada. Resumindo, a escolha do grau de refino da face do hemi-cubo não é uma tarefa fácil, pois constitui um compromisso entre acurácia e tempo de processamento.

É importante salientar que neste método temos a necessidade de se efetuar o processamento de corte (*clipping*) nas faces do cubo, quando a região das superfícies

projetadas abranjam parcialmente sua área, conforme Fig.3.22. Vários algoritmos como o Sutherland-Hodgman descrito em (Foley *et al.*, 1990) podem ser utilizados para este fim.

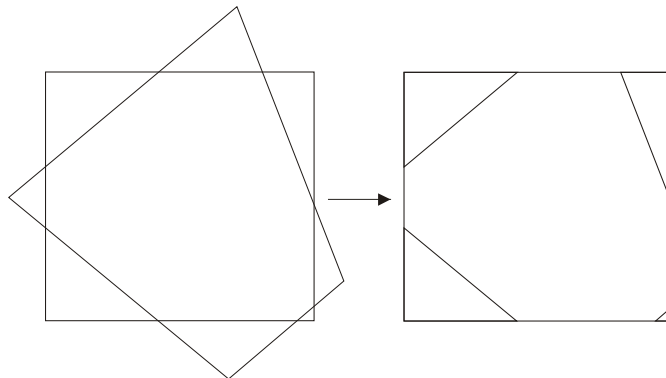


Figura 3.22– O processo de *clipping*

Após o processo de *clipping* é necessário determinar quais *pixels* estão cobertos. Isto é realizado verificando se a posição do *pixel* em consideração se encontra dentro da área “recortada”. Esta operação é facilmente realizada transformando o plano em questão para coordenadas homogêneas (Foley *et al.*, 1990).

A visibilidade é avaliada utilizando um simples e eficiente algoritmo tipo *Z-buffer*, amplamente difundido no meio da computação gráfica (Foley *et al.*, 1990). Resumidamente, este algoritmo consiste na associação de um valor de profundidade (distância entre o centro do hemi-cubo e cada superfície) para cada *pixel* em questão. Assim, caso duas superfícies projetadas cubram o mesmo *pixel*, o valor desta profundidade é comparado e o *pixel* será associado com a superfície mais próxima, ou seja, a que possui a menor profundidade. Para a realização de tal verificação, para cada face do hemi-cubo, todas as superfícies envolvidas devem ser projetadas, resultando no cálculo simultâneo de uma linha inteira da matriz do fator de forma. Isto significa que, em um ambiente com N superfícies, N fatores de forma são calculados de uma só vez para cada face do hemi-cubo. O seu algoritmo é descrito a seguir.

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,840 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:58 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 155 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

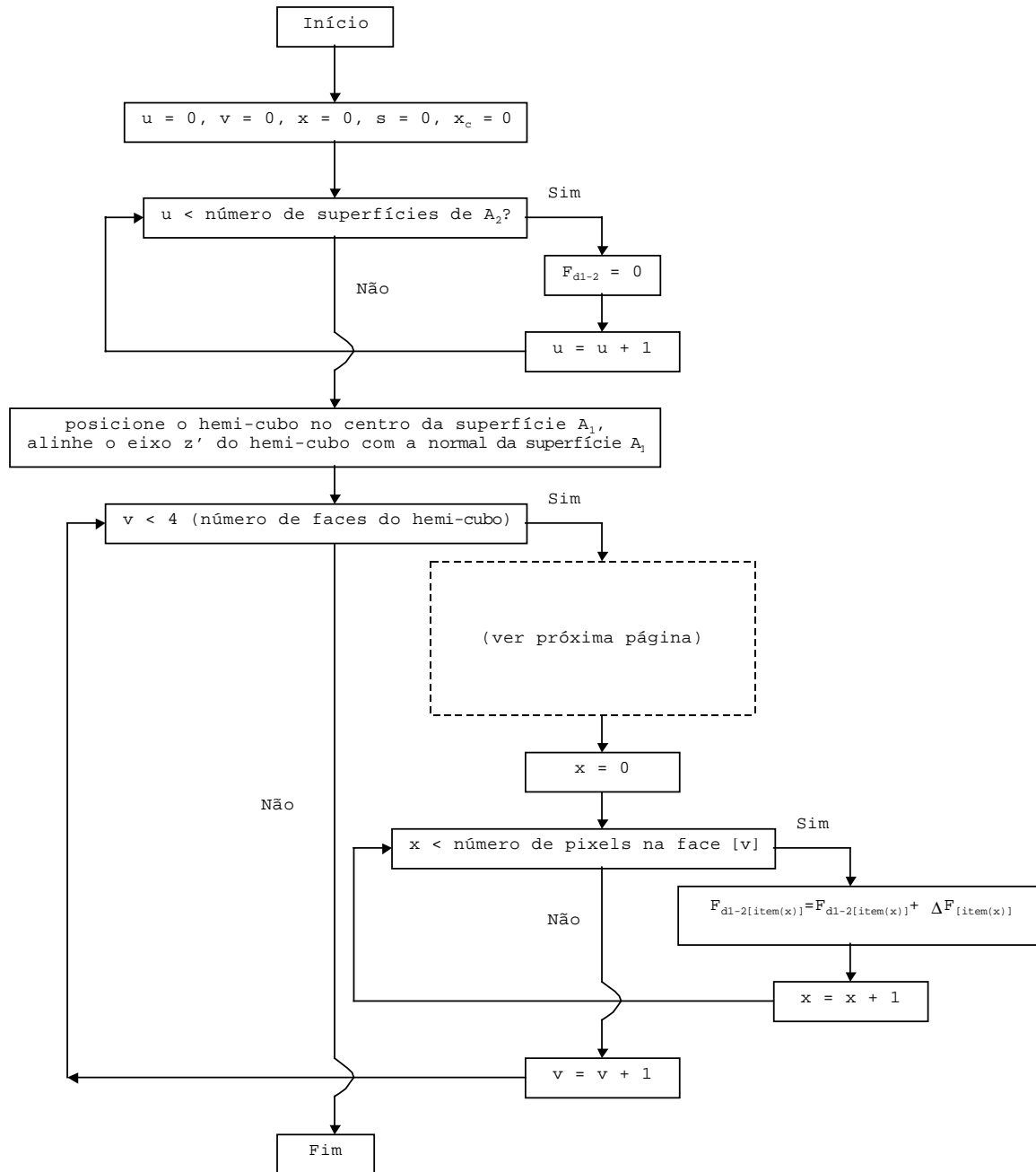


Figura 3.23– Algoritmo do método Hemi-Cube

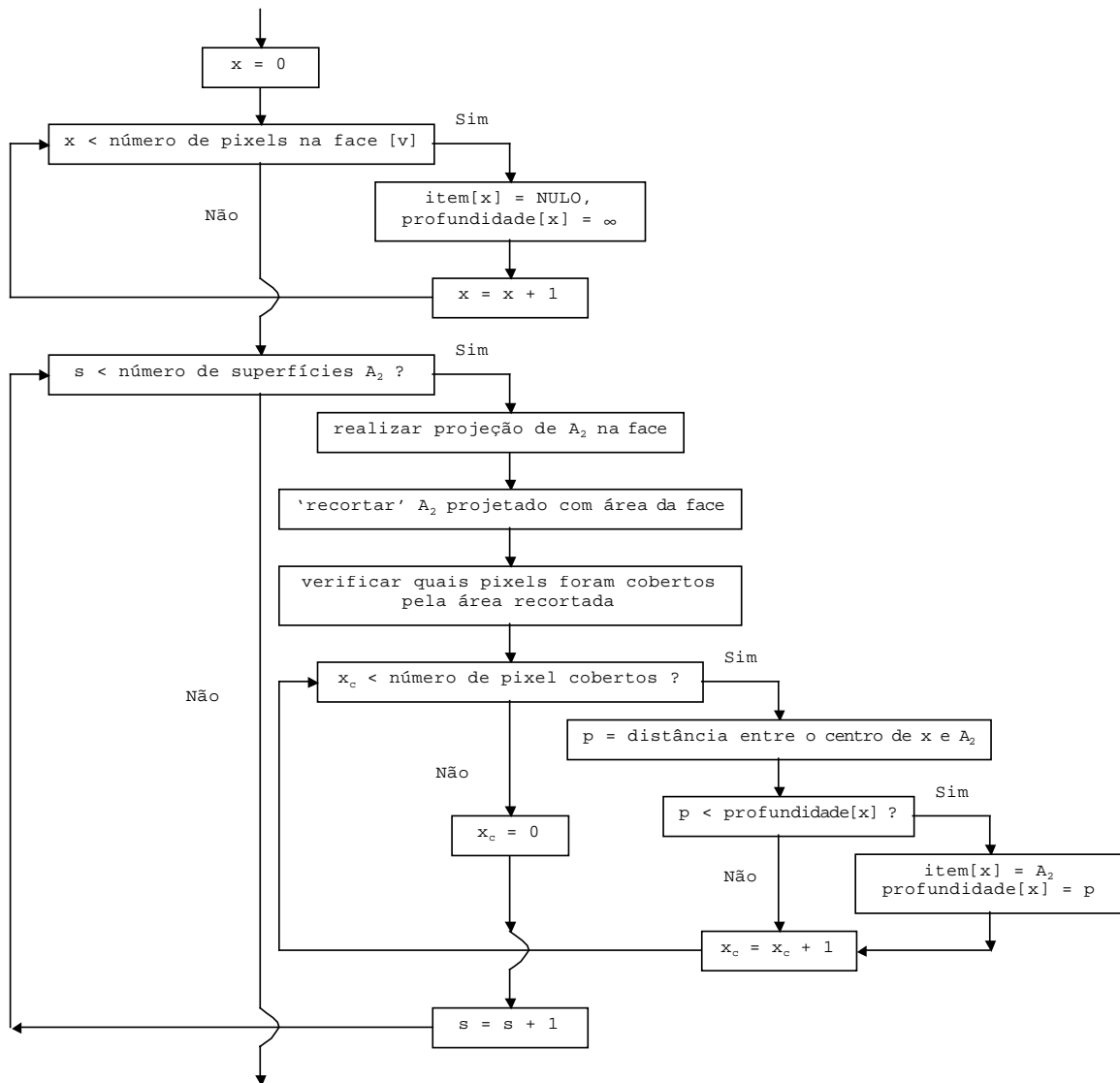


Figura 3.24– Algoritmo do método Hemi-Cube (cont.)

Em virtude da filosofia inerente deste algoritmo, o mesmo não necessita realizar processos de checagem (como os que serão descritos na seção 3.4.5) utilizados para a seleção de superfícies obstrutoras. O fato de o próprio método do hemi-cube ser responsável por esta tarefa faz com que este tenha boa performance computacional.

Atualmente, este método está tirando proveito da capacidade computacional das poderosas *workstations* presentes no mercado. Estas rotinas para projeção, *clipping* e verificação de interferências já estão otimizados e se encontram presentes e implementados em bibliotecas em nível do “*hardware*” da máquina, sendo responsabilidade do usuário somente acessá-las e utilizá-las. Um exemplo da aplicação destas novas técnicas é mostrada

por Rushmeier *et al.* (1990), onde uma redução drástica no tempo de processamento é atingida.

Como foi mostrado, o método Hemi-Cube calcula fator de forma F_{d1-2} entre um elemento infinitesimal e uma área finita. Portanto, cuidado deve ser tomado na sua utilização para a não violação da hipótese da proximidade e visibilidade. Visando a diminuição destes erros, no presente trabalho, o método Hemi-Cube implementado discretiza também a superfície A_1 , avaliando a integral externa numericamente, como mostrado na seção anterior e expresso pela Eq.(3.19).

3.4.4 Integral de Contorno

O método da integral de contorno é uma aproximação numérica da Eq.(3.16). O método aqui descrito baseia-se em uma simplificação desta expressão, desenvolvida por Mitalas e Stephenson (1966), onde uma das integrais é avaliada analiticamente, conforme Fig.3.25.

Se os contornos das superfícies A_1 e A_2 forem compostos por um número finito de segmentos retos podemos escrever a Eq.(3.16) como

$$A_1 F_{1-2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 \cos \theta_{p,q} \oint_{C_1} [(T \cos \alpha \ln T + S \cos \beta \ln S + U \gamma - R) dl_1]_{p,q} \quad (3.37)$$

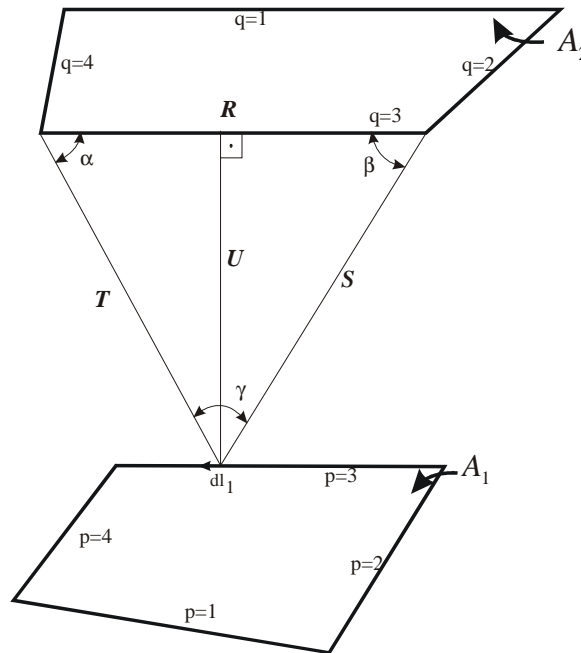


Figura 3.25– Elementos geométricos envolvidos no método de Mitalas e Stephenson

onde C_l é o contorno da superfície A_l e $\theta_{p,q}$ é ângulo entre os contornos p e q . As variáveis S, T, U, α, β e γ são funções de l , que é a posição ao longo do contorno p onde está sendo avaliada a integral.

Por simplificação, as áreas A_1 e A_2 são apresentadas possuindo 4 lados, mas a Eq.(3.37) pode ser estendida para dois polígonos quaisquer de n e m lados, respectivamente.

O método numérico utilizando a expressão de Mitalas e Stephenson consiste na avaliação numérica da integral da Eq.(3.37), obtida realizando-se a divisão do contorno p em um número discreto de segmentos. De acordo com Walton (1987), a maior precisão é atingida avaliando a integral ao longo da fronteira da superfície que possuir menores contornos.

O presente estudo utiliza ainda mais duas sugestões descritas por Walton (1987). A primeira consiste em utilizar a metodologia da Quadratura Gaussiana (Abramowitz e Stegun, 1964) para a avaliação numérica da integral, que consiste na divisão do contorno p em segmentos de tamanhos diferentes, resultando em uma maior precisão na avaliação da integral. O tamanho destes segmentos e a posição onde a integral será avaliada é escolhida pelo método, em virtude do número de segmentos escolhidos para a discretização do contorno em questão. Walton (1987) relata em seu trabalho significantes melhorias na precisão com a utilização deste procedimento.

A segunda sugestão aqui implementada consiste na verificação da existência de contornos adjacentes e na avaliação analítica desta integral, quando isto acontecer. Se dois contornos forem adjacentes, como no problema de duas placas perpendiculares mostradas na Fig.3.4, avaliando-se numericamente a integral da maneira com que é apresentada na Eq.(3.37) resultará em erros grosseiros. Estes problemas podem ser resolvidos avaliando a expressão da Eq.(3.37) analiticamente. A dedução abaixo, ilustra como obter a expressão utilizada para a avaliação analítica da integral. Por simplicidade é assumido um sistema coordenado unidimensional.

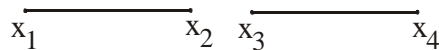


Figura 3.26– Dois Segmentos em coordenadas unidimensionais

Conforme a Fig.3.26, temos

$$\begin{aligned} a &= x_2 - x_1 & b &= x_4 - x_3 & c &= x_3 - x_1 \\ d &= x_4 - x_1 & e &= x_3 - x_2 & f &= x_4 - x_2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\left[(d^2 \ln d^2 - d^2 + c^2 - c^2 \ln c^2 + e^2 \ln e^2 - e^2 + f^2 - f^2 \ln f^2) / 4 - ab \right] \quad (3.39)$$

Sabemos também que se dois segmentos forem colineares $\cos \theta_{p,q} = -1$ e $U = 0$. Assim, observando a Fig.3.26 quando o início e o fim dos dois contornos são coincidentes, a expressão da Eq.(3.39) resulta em

$$\left[(R^2 \ln R^2 - R^2) / 2 - R^2 \right] \quad (3.40)$$

Walton (1987) também descreve que o tempo de processamento necessário para utilizar a expressão analítica não é muito diferente do que aquele comparado com a avaliação numérica, mesmo tendo que se verificar a existência de contornos adjacentes. Isto porque o tempo gasto nesta verificação é compensado pela rápida avaliação analítica da integral.

Uma vantagem deste método é que, à medida que as distâncias entre as superfícies envolvidas vai aumentando, uma divisão cada vez menor de elementos é necessária para mantermos a mesma precisão do resultado. Portanto, podemos controlar a velocidade de processamento do algoritmo realizando um número de divisões baseadas em uma precisão constante, previamente estipulada em função das distâncias.

Em virtude da grande dificuldade, e conseqüentemente do tempo computacional envolvido para a determinação dos contornos de inúmeras superfícies obstrutoras, o método aqui implementado, da mesma maneira que o método da Dupla Discretização apresentado na seção anterior, utiliza as rotinas que serão descritas na seção 3.4.5, visando a diminuição da lista de superfícies que podem estar causando obstruções.

Uma vez determinadas as superfícies A_1 e A_2 e uma lista de superfícies obstrutoras, o fator de forma utilizando integral de contorno e considerando obstruções, é verificado utilizando técnicas de projeção. Isto é feito somando o fator de forma da área da superfície de interesse sem obstrução e subtraindo da soma do fator de forma da área de sombra das superfícies que obstruem o campo de visão. Este procedimento será mais bem detalhado a seguir.

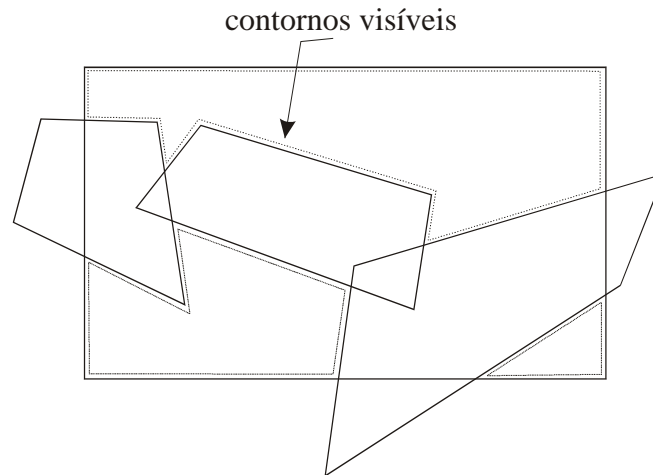


Figura 3.27–Contornos de área visível

Inicialmente, deve-se determinar sobre qual superfície iremos realizar as projeções. Walton (1987) em seu trabalho descreve que erros menores são obtidos quando as superfícies obstrutoras são projetadas no plano que contém a superfície mais próxima das mesmas. Para isto, a distância do centro de cada superfície obstrutora com relação ao centro da superfície A_1 é calculada, obtendo-se uma média destes valores. Procedimento semelhante é realizado para a superfície A_2 , sendo que a superfície escolhida será aquela que possuir menor valor desta distância média.

Uma vez determinada a superfície (A_m) na qual iremos realizar as projeções, um novo sistema coordenado é criado e um novo eixo z' é posicionado nesta superfície alinhado com sua normal. Qualquer elemento que possuir alguma parte com z' negativo é recortado, utilizando um algoritmo de *clipping*, restando somente a parte do elemento com z' positivo, ou seja, a parte da superfície que possui fator de forma não nulo. Deve-se recortar ou eliminar também qualquer superfície que esteja totalmente ou parcialmente atrás da outra superfície em questão, chamada daqui por diante de A_n . Isto é realizado para evitarmos problemas nas projeções.

A seguir é usada a Eq.(3.37) para as duas superfícies (A_m e A_n) desconsiderando obstruções. Caso haja contornos colineares é utilizada a Eq.(3.40). O número de divisões por contorno é escolhido utilizando valores baseados na distância e na precisão requerida, sendo a integral calculada utilizando a Quadratura Gaussiana. O presente trabalho pode utilizar valores fixos para o número de subdivisões ou valores que são calculados utilizando uma correlação empírica que fornece o número de subdivisões baseado na precisão e na distância

entre as superfícies.

Em seguida, a superfície A_n é discretizada em N sub-elementos. Para cada ponto de vista de um sub-elemento n , uma projeção no plano $z' = 0$ é realizada para cada superfície obstrutora. Caso esta sombra possua alguma região fora da área A_m ela será recortada somente levando em consideração a sombra da área da obstrução que realmente afeta a visão. Em seguida, as regiões de sombra resultantes são adicionadas utilizando técnicas de intersecção e união de polígonos convexos em coordenadas homogêneas (Foley *et al.*, 1990).

De posse do polígono de sombra resultante, a Eq.(3.37) é avaliada levando em consideração a área do sub-elemento e o contorno final da sombra, sendo este valor subtraído do valor inicial computado entre as duas áreas desconsiderando obstrução. Este processo é realizado para todos os sub-elementos, resultando no valor do fator de forma F_{1-2} . A seguinte expressão resume esta operação

$$A_1 F_{1-2} = A_1 F_{1-2 \text{ (sem obstrução)}} - \sum_{i=1}^N A_n F_{n\text{-sombas}} \quad (3.41)$$

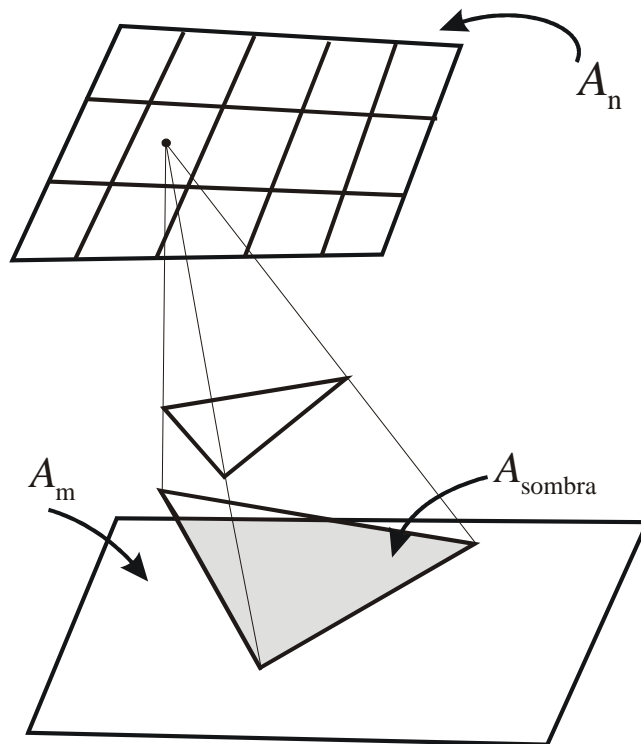


Figura 3.28– Projeção do sub-elemento n na superfície A_m com obstrução

Nas figuras a seguir, de maneira simplificada é apresentado o algoritmo utilizando as operações acima desenvolvidas.

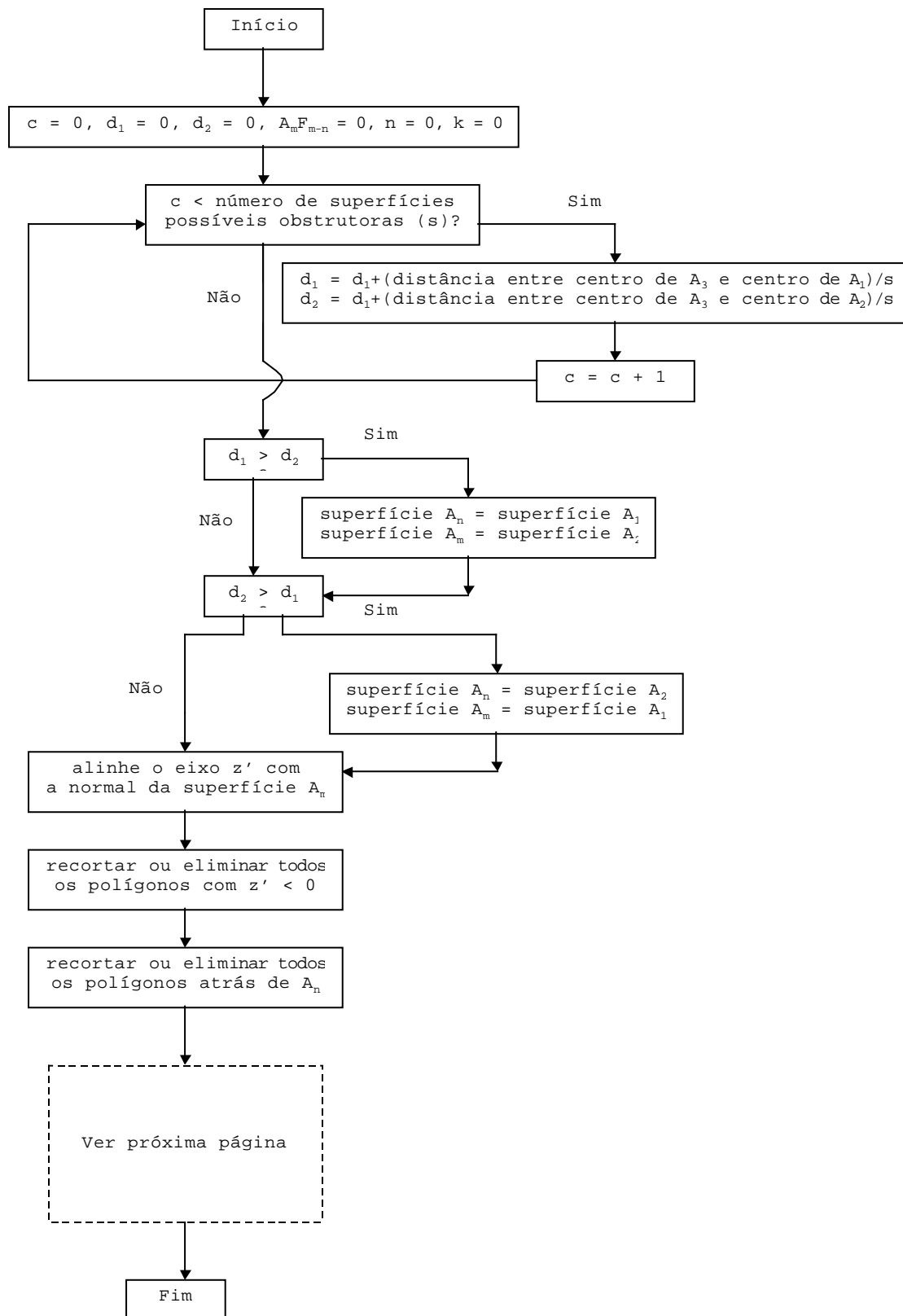


Figura 3.29– Algoritmo do método de Mitalas e Stephenson

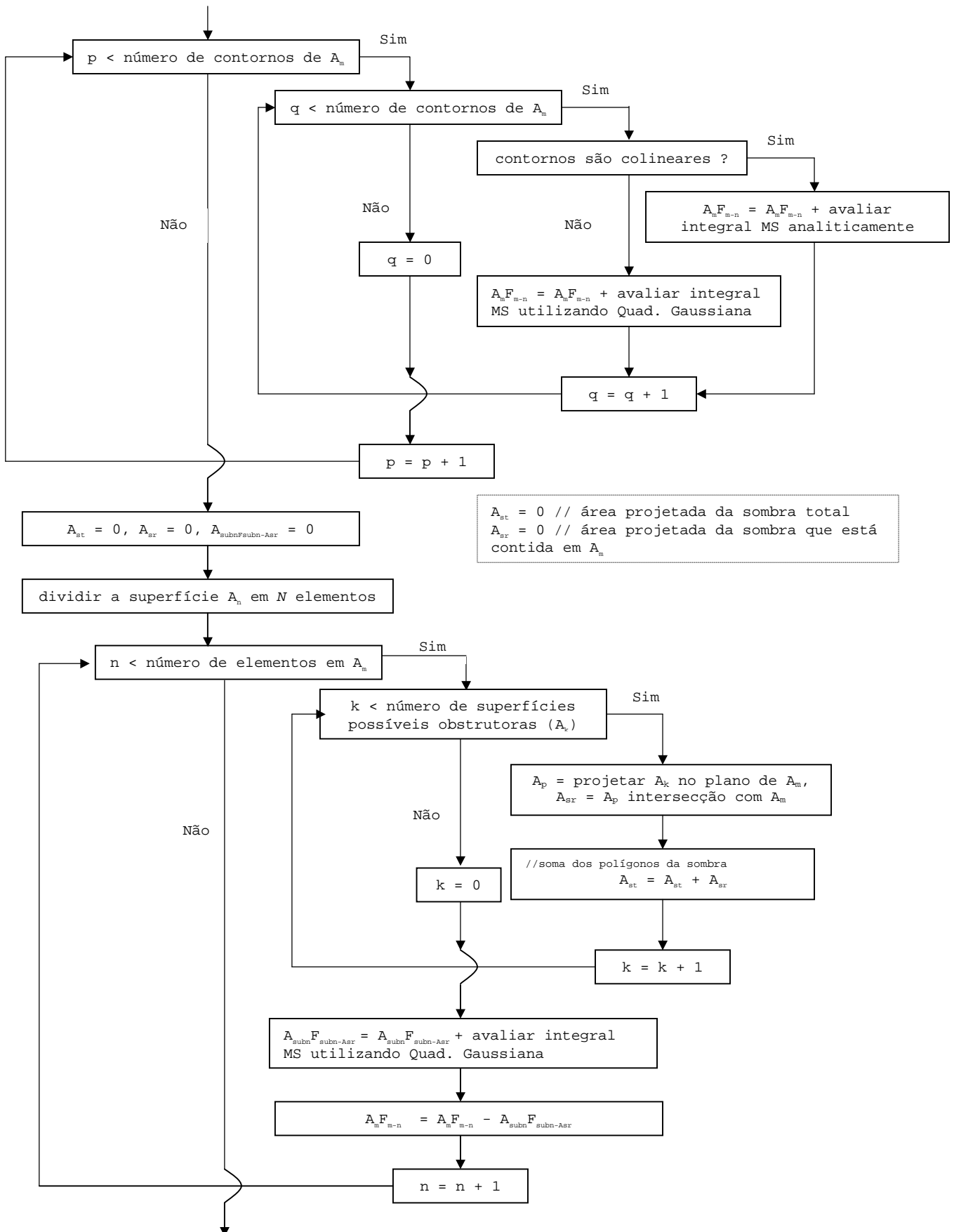


Figura 3.30– Algoritmo do método de Mitalas e Stephenson (cont.)

Uma característica importante desta metodologia está no fato de que ela necessita que somente seja discretizada uma das superfícies em questão, resultando em menos processamento. Por outro lado, por ser bastante complexa com relação as checagens e as operações de recorte, união, interseções e projeções de polígonos, esta metodologia é propícia ao surgimento de erros relacionados com imprecisão das operações computacionais, que em geral utilizam valores não-inteiros truncados para armazenamento das variáveis.

3.4.5 Verificação de Obstruções

Como já dito anteriormente, métodos numéricos como a Dupla Discretização são em geral mais custosos computacionalmente. Este fato, não é somente devido a natureza intrínseca de seus métodos, mas principalmente ao tempo gasto para a realização de inúmeras checagens por possíveis superfícies obstrutoras. O tempo de processamento necessário para esta tarefa é da ordem de N^3 , aumentando drasticamente com o aumento do número de superfícies em questão.

Visando reduzir este número de verificações, os algoritmos utilizados neste estudo, com exceção do *Hemi-Cube*, utilizam um conjunto de testes que objetivam reduzir o número de superfícies a serem consideradas como possíveis obstrutoras. A metodologia aqui demonstrada é baseada no trabalho de Walton (1987) e será brevemente descrita.

Dado um par de superfícies entre as quais se deseja calcular o fator de forma (A_1 e A_2), este conjunto de testes se baseia na criação de uma lista de possíveis superfícies obstrutoras e, através de sucessivas verificações, vai classificando-as ou eliminando-as desta lista, visando a redução deste número. Os testes são apresentados a seguir:

1. teste do **produto normal**. Este primeiro teste é o mais básico de todos. Ele visa classificar e eliminar todas as superfícies que não obstruem um campo de vista qualquer. Uma superfície será eliminada da lista de possíveis obstrutoras caso não existir qualquer outra atrás dela. Esta observação é realizada verificando o produto interno do vetor normal desta superfície com o vetor que liga o seu centro aos vértices das demais superfícies envolvidas. Caso o valor deste produto interno seja negativo pelo menos por uma vez, significa que esta superfície possui outras superfícies atrás dela e assim não deve ser eliminada da lista. Este teste é muito útil para a eliminação das superfícies mais externas do ambiente em questão e deve ser realizado nas etapas

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,840 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:58 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 155 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

iniciais do algoritmo, pois diferentemente dos outros, ele não necessita que se saiba a priori entre quais superfícies deseja-se calcular o fator de forma.

2. teste da **auto-obstrução**. Dadas duas superfícies A_1 e A_2 entre as quais se deseja determinar o fator de forma, o campo de vista entre elas pode ser obstruído pelas suas próprias posições relativas e orientações. A superfície A_1 pode estar inteiramente atrás de A_2 ou vice-versa. Esta checagem é facilmente determinada utilizando também a verificação do sinal do produto interno entre o centro de A_1 e os vértices de A_2 . Caso esta operação resulte em todos os valores negativos, a superfície A_2 se encontra atrás de A_1 . Se este resultado for sempre positivo, a superfície A_2 está na frente de A_1 . No caso deste resultado fornecer valores negativos e positivos, obstruções parciais estão presentes. Desta forma, um processo de *clipping* deverá ser realizado e o polígono resultante, o qual contém somente a área de A_2 vista pela superfície A_1 , é construído. O mesmo processo é realizado para a superfície A_2 .
3. teste do **cone**. Após ter sido verificada somente a situação envolvendo as duas superfícies em questão, é necessário agora verificar se outra qualquer superfície A_3 pode obstruir o campo de vista de A_1 e A_2 . Este processo é realizado inicialmente construindo um cone que contém as superfícies A_1 e A_2 . Este cone é construído utilizando o maior raio que circunscreve cada um dos elementos e é alinhado ao vetor que liga os centros das superfícies.

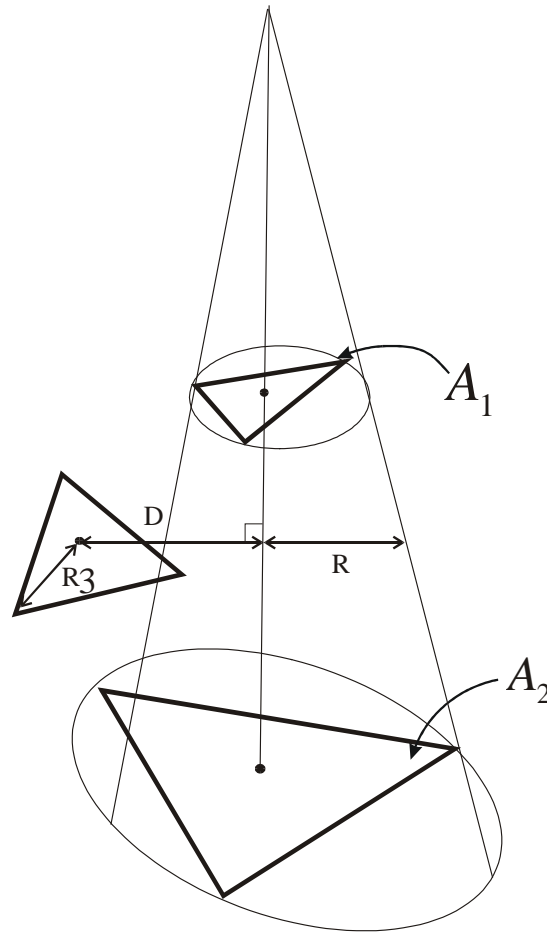


Figura 3.31– Entes geométricos envolvidos no teste do cone

Para cada superfície da lista de obstrutoras a menor distância entre o seu centro e o vetor que une os centros de A_1 e A_2 é calculado. Esta distância é comparada com o raio do cone na altura do centro da possível superfície obstrutora, de acordo com a seguinte expressão:

$$D^2 > (R + R_3)^2 \quad (3.42)$$

onde R_3 é o raio da circunferência que circunscreve o elemento.

Se a expressão anterior for satisfeita, a superfície A_3 será excluída da lista de possíveis superfícies obstrutoras.

4. teste de **orientação das superfícies**. A próxima filtragem consiste em uma sucessiva utilização dos testes de produto interno envolvendo as superfícies A_1 , A_2 e a possível obstrutora A_3 . A superfície A_3 deve ser eliminada da lista caso ela satisfaça alguma das seguintes situações: a) A_3 está completamente atrás de A_2 ; b) A_3 está completamente

atrás de A_1 ; c) A_1 e A_2 estão ambos na frente de A_3 e d) A_1 e A_2 estão ambos atrás de A_3 .

5. testes de **projeção**. Este último teste é um pouco mais elaborado computacionalmente. Consiste na criação de um novo eixo (z') alinhado com o vetor que une os centros das superfícies A_1 e A_2 . Em virtude da razão entre os tamanhos dos raios das circunferências que circunscrevem estas áreas, uma projeção reta ou cônica (similar ao teste do cone) é realizada envolvendo estas duas superfícies. De posse das áreas destas projeções, é então construído o menor polígono convexo que contém as duas áreas. Este polígono é comumente chamado de *convex hull* pelos especialistas em computação gráfica e sua construção é também realizada utilizando os conceitos de coordenadas homogêneas (Foley *et al.* 1990). Após isto, cada superfície obstrutora é projetada neste plano, sendo eliminada da lista caso nenhum ponto da projeção de seus vértices esteja dentro deste polígono.

4 Troca Radiativa entre Superfícies Difusas Cinzentas

Neste capítulo serão apresentadas duas metodologias comumente utilizadas para o cômputo de trocas radiativas entre superfícies difusas cinzentas, o método de Gebhart e o tradicional método da Radiosidade. Estas abordagens são amplamente empregadas nos simuladores térmicos comerciais disponíveis no mercado, diferindo somente das grandezas que levam em consideração e da forma com que são implementadas computacionalmente. Como será mostrado, estas metodologias baseiam-se no mesmo conjunto de hipóteses fundamentais e portanto fornecem os mesmos resultados.

4.1 Hipóteses Simplificativas

Como descrito por Sparrow (1963), todo problema envolvendo trocas radiativas começa com o conceito de cavidade. Este conceito é muito útil para desenvolvermos as relações de troca de calor entre superfícies. Considere a superfície A_1 da Fig.4.1 onde as superfícies estão trocando calor por radiação. Para determinarmos a quantidade de calor incidente em A_1 é necessário levarmos em consideração todas as parcelas provenientes das demais superfícies do ambiente. Isto fica facilitado se construirmos uma cavidade fictícia que envolva todas as superfícies em questão. O termo fictício é introduzido, pois algumas fronteiras desta cavidade podem ser imaginárias. Por exemplo, uma janela aberta em um ambiente pode ser entendida como uma fronteira desta cavidade que não reflete calor e possui uma intensidade radiativa igual a toda a radiação que passa através dela.

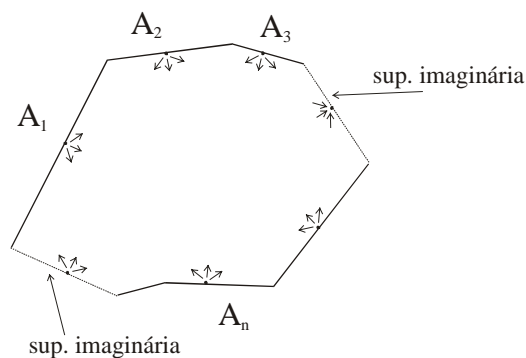


Figura 4.1– Cavidade com superfícies imaginárias

De posse do conceito de cavidade, os balanços radiativos para cada superfície podem ser realizados e todas as parcelas levadas em consideração como se fossem simples superfícies interagindo entre si através das multi-reflexões.

Não somente os métodos que serão apresentados a seguir, como também o método de Hottel (1954) e o método de Oppenheim(1956), são baseados em um determinado conjunto de hipóteses, cinco no total, que formulam a base para o entendimento e posterior cômputo da troca radiativa entre superfícies.

A primeira hipótese é de que as superfícies em questão são isotérmicas. Na prática o que acontece é que durante a aplicação destes métodos, a superfície é discretizada em superfícies menores, processo conhecido como geração da malha radiativa, e as superfícies contidas nesta malha são assumidas tendo somente um valor de temperatura, como ilustrado pela Fig.4.2.

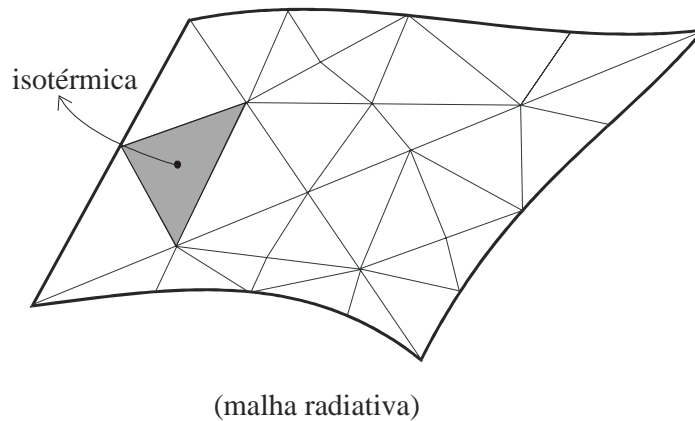


Figura 4.2– Discretização com superfícies isotérmicas

A segunda hipótese considera as superfícies cinzentas. Caso as superfícies não apresentem tal comportamento em todo o espectro em questão, o intervalo de interesse pode ser dividido em bandas menores e as superfícies serem tratadas como cinzentas nestes intervalos, tornando válidas as aplicações destes métodos (Fig.4.3).

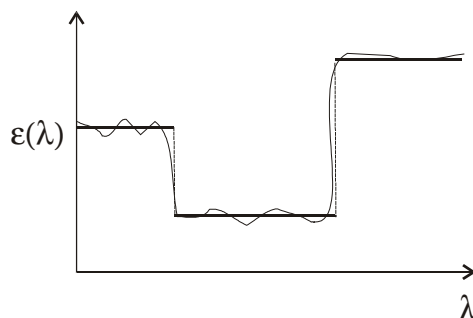


Figura 4.3– Emissividade espectral de superfície cinzenta por faixas

Ressalta-se que durante este trabalho estamos levando em consideração somente a faixa de comprimento de onda relativa ao espectro infra-vermelho, e todas as superfícies envolvidas serão consideradas cinzentas nesta faixa. Se, por exemplo, estivéssemos também interessados no cômputo das trocas de calor no espectro solar, teríamos que considerar se as propriedades em questão (emissividade, absortividade e refletividade) no espectro da luz visível possuem os mesmos valores e comportamentos que no espectro infra-vermelho. Se isto acontecer, podemos utilizar as mesmas simplificações e resolver o problema conjuntamente. Caso esta simplificação não se aplique, as trocas radiativas no espectro visível devem ser computadas separadamente do espectro infra-vermelho e os valores dos fluxos radiativos devem ser adicionados no final.

A terceira simplificação é pertinente à energia que é refletida pela superfície. Esta simplificação assume que a superfície reflete energia difusamente, isto é, a reflexão acontece de maneira uniforme em todos os ângulos. Analogamente, a quarta hipótese assume que emissão de energia pela superfície não possui também direção preferencial, ou seja, é difusa. O conjunto destas duas hipóteses, como já foi apresentado, define o conceito de superfícies difusas e faz com que as trocas radiativas não tenham histórico, pois um observador olhando para uma superfície qualquer não terá condições de distinguir qual parcela de energia é refletida e emitida, sendo todas as parcelas tratadas juntas como a energia total (refletida + emitida) que deixa a superfície, conhecida como radiosidade.

A quinta e última hipótese é talvez a menos difundida, pois aparece indiretamente nas equações e nos cálculos efetuados. Esta simplificação está relacionada com a utilização do valor constante do fator de forma de uma superfície finita para outra superfície finita. Quando estamos utilizando este valor no cálculo da energia trocada entre superfícies, estamos implicitamente assumindo que a energia total que deixa ou incide em uma superfície é uniformemente distribuída ao longo dela. Em problemas reais, mesmo com temperaturas e emissividades uniformes é pouco provável que teremos também reflexões uniformes, desta forma, esta hipótese amplamente assumida não é em geral satisfeita.

As hipóteses acima apresentadas fazem com que o complexo fenômeno da radiação seja facilmente tratado computacionalmente.

4.2 Trocas Radiativas Utilizando o Conceito do Fator de Forma

À seguir, uma extensão do segundo e terceiro capítulo será fornecida somente com o intuito de introduzir as equações de trocas radiativas entre superfícies.

Manipulando as Eqs.(3.3) e (3.4) do capítulo anterior, podemos inicialmente expressar a troca radiativa entre superfícies negras em função do seu fator de forma e de suas temperaturas, obtendo a seguinte equação para a troca radiativa entre dois elementos infinitesimais de área

$$dq_{d1-d2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)F_{d1-d2}dA_1 = \sigma(T_1^4 - T_2^4)F_{d2-d1}dA_2 \quad (4.1)$$

Analogamente, para um elemento infinitesimal de área e uma superfície finita, temos

$$dq_{d1-2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)F_{d1-2}dA_1 = \sigma(T_1^4 - T_2^4)F_{2-d1}A_2 \quad (4.2)$$

Da mesma maneira, entre duas superfícies negras de tamanho finito, temos

$$q_{1-2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)F_{1-2}A_1 = \sigma(T_1^4 - T_2^4)F_{2-1}A_2 \quad (4.3)$$

No caso de superfícies cinzentas, para conhecermos a troca radiativa entre dois elementos, temos que levar em consideração todas as superfícies da cavidade em que as mesmas estão presentes, pois elas interagem entre si através das multi-reflexões devido às parcelas de energia refletidas. Estas parcelas podem ser expressas da seguinte forma para uma cavidade de N superfícies

- Parcela emitida de A_1 que chega em uma superfície A_i

$$q_{1, \text{emitido}-i} = F_{1-i}A_1 \cdot \epsilon_1 \sigma T_1^4 \quad (4.4)$$

- Parcela refletida de A_1 que chega em uma superfície A_i

$$q_{1, \text{refletido}-i} = A_1 F_{1-i} \cdot \rho_1 \left(\sum_{i=1}^N \epsilon_i \sigma T_i^4 A_i F_{i-1} \right) \quad (4.5)$$

- Parcela absorvida por A_1

$$q_{1, \text{absorvido}} = \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^N \epsilon_i \sigma T_i^4 A_i F_{i-1} \right) \quad (4.6)$$

Para conhecermos o troca de calor líquida na superfície, devemos realizar um balanço

envolvendo as grandezas acima. Existem várias maneiras de realizarmos este balanço, sendo que estas abordagens diferem na grandeza levada em consideração. A título de exemplo podemos realizar o balanço em todas as superfícies focando na energia total (emitida + refletida), que sai de uma superfície ou na energia total que é absorvida por esta superfície. Apresentar estas abordagens é o objetivo das próximas seções.

4.3 Método da Radiosidade

A explicação deste método, descrito no texto de Eckert e Drake (1959), fica facilitada com a apresentação da Fig.4.4, aonde é ilustrada uma cavidade composta por N superfícies.

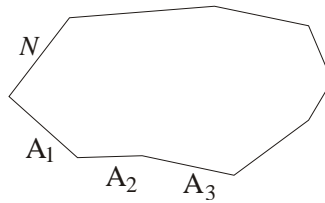


Figura 4.4– Cavidade composta por N superfícies

Por simplicidade assumiremos que as temperaturas $T_1, T_2, T_3, \dots, T_N$ são prescritas e conhecidas. A condição de fluxo prescrito na face também pode ser aplicada e a dedução facilmente desenvolvida.

O primeiro passo deste método consiste na realização de um balanço de calor para cada superfície. Para isto, vamos primeiramente definir duas quantidades

$$J = \frac{\text{energia que sai da superfície}}{\text{tempo} \times \text{área}}; \quad H = \frac{\text{energia que chega na superfície}}{\text{tempo} \times \text{área}} \quad (4.7)$$

O termo J , como dito anteriormente é conhecido por radiosidade e representa a energia total que sai de uma superfície, ou seja, é a soma das parcelas emitida e refletida. Para cada superfície nesta cavidade, podemos escrever a seguinte expressão, aqui demonstrada para a superfície A_1

$$J_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + \rho_1 H_1 \quad (4.8)$$

Da forma com que está escrito acima, a Eq.(4.8) contém duas incógnitas H e J . O termo H pode ser eliminado conhecendo-se a fonte de onde provém esta energia que chega na

superfície A_1 . É fácil de ver que esta energia é advinda das parcelas de energia que saem das outras superfícies da cavidade. Temos, por exemplo, que a energia que sai da superfície A_2 e atinge diretamente a superfície A_1 é igual a $A_2 J_2 F_{2-1}$. Utilizando a lei da reciprocidade do fator de forma e dividindo pela área de A_1 , obtemos a expressão para a energia que chega na superfície A_1 em termos da energia que sai das suas vizinhas

$$H_1 = J_1 F_{1-1} + J_2 F_{1-2} + J_3 F_{1-3} + \dots + J_N F_{1-N} \quad (4.9)$$

O termo F_{1-1} foi adicionado pois a superfície A_1 pode ser côncava e parte da energia por ela refletida pode ser por ela absorvida diretamente. Introduzindo esta nova expressão na Eq.(4.8), obtemos

$$J_1 = \epsilon_1 \sigma T_1^4 + \rho_1 \sum_{k=1}^N J_k F_{1-k} \quad (4.10)$$

Reorganizando a expressão acima e apresentando-a na forma matricial temos o seguinte sistema de equações que precisa ser resolvido envolvendo todas as superfícies da cavidade

$$\begin{pmatrix} 1 - \rho_1 F_{1-1} & -\rho_1 F_{1-2} & \dots & -\rho_1 F_{1-N} \\ -\rho_2 F_{2-1} & 1 - \rho_2 F_{2-2} & \dots & -\rho_2 F_{2-N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\rho_N F_{N-1} & -\rho_N F_{N-2} & \dots & 1 - \rho_N F_{N-N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \sigma T_1^4 \\ \epsilon_2 \sigma T_2^4 \\ \dots \\ \epsilon_N \sigma T_N^4 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Uma superfície negra (A_b), onde a radiosidade é conhecida e vale σT_b^4 , pode ser retirada da matriz, diminuindo o número de incógnitas a serem resolvidas.

Uma vez solucionado o sistema linear acima, temos a condição de determinar a troca líquida de calor radiativa para cada superfície envolvida, somente realizando o balanço de energia na superfície, dado por

$$q_1 = (\epsilon_1 \sigma T_1^4 - \alpha_1 H_1) A_1 = (J_1 - H_1) A_1 \quad (4.12)$$

onde q_1 é a energia fornecida ou retirada da superfície A_1 por outros meios que não a radiação em consideração.

Utilizando a Eq. (4.8), podemos eliminar H_1 da equação acima, obtendo

$$q_1 = \frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon_1} (\sigma T_1^4 - J_1) A_1 \quad (4.13)$$

Assim, podemos perceber que o fluxo de calor líquido, resultante em cada superfície é

obtido uma vez que a sua radiosidade é conhecida.

Deve-se salientar que o sistema linear não homogêneo, apresentado pela Eq.(4.11), possui a característica de ter dominância diagonal, sendo fácil de ser resolvido por qualquer processo iterativo. Isto pode ser comprovado analisando os valores dos elementos desta matriz. Sabemos que os valores do fator de forma e refletividade para os elementos fora da diagonal principal sempre estão entre 0 e 1, sendo que sua multiplicação em geral fornece valores pequenos (menores do que 1). Como estamos trabalhando com superfícies discretizadas em elementos convexas, os valores de F_{1-1} , F_{2-2} , ... F_{N-N} são sempre nulos, resultando em elementos unitários na diagonal principal.

4.4 Método de Gebhart

O ponto de partida da metodologia proposta por Gebhart (1961) é a expressão que fornece a troca de calor líquida de uma superfície A_i com todas as outras do sistema.

Considere uma cavidade composta de N superfícies difusas, cinzentas como a utilizada na seção anterior. De acordo com a Eq.(4.12), para uma superfície A_i qualquer da cavidade, a troca de calor líquida resultante é a diferença entre o que ela emite e a energia absorvida incidente devido a emissão das demais superfícies.

Gebhart então define G_{i-j} , *absortion factor* (coeficiente de absorção), como sendo a fração da energia emitida pela superfície A_i que atinge A_j e é absorvida. Isto inclui todos os caminhos possíveis, isto é, diretamente por meio de uma ou múltiplas reflexões. Logo, $A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 G_{i-j}$ é a quantidade de energia emitida por A_i que é absorvida por A_j . Aplicando um balanço de energia para A_i , tem-se

$$q_i = A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 - \left(A_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4 G_{1-i} + A_2 \epsilon_2 \sigma T_2^4 G_{2-i} + \dots + A_j \epsilon_j \sigma T_j^4 G_{j-i} + \dots \right) \quad (4.14)$$

$$q_i = A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 - \sum_{j=1}^N A_j \epsilon_j \sigma T_j^4 G_{j-i} \quad (4.15)$$

Portanto, o cálculo dos fluxos requer a determinação dos coeficientes de absorção (G_{i-j}). G_{i-i} normalmente não são nulos, mesmo para uma superfície plana, pois parte do que é emitido pode retornar a ela mesma, através da reflexão em outras superfícies.

Devemos, agora, determinar os fatores G . Sabemos que a energia total emitida de A_i é

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,840 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:58 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 155 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

$A_i \epsilon_i \sigma T_i^4$. A porção desta energia que atinge A_j diretamente e é absorvida é dada por $A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 F_{i-j} \epsilon_j$, onde, F_{i-j} é o fator de forma entre as superfícies A_i e A_j , e como foi visto, corresponde a fração da energia radiante que deixa A_i e atinge A_j apenas pelo caminho direto. Observe que para uma superfície cinza difusa, a emissividade ϵ é igual a absorvidade α . Qualquer outra energia radiante que atinge A_j vindo de A_i deve sofrer ao menos uma reflexão. Mas, a energia emitida de A_i que chega em uma superfície A_n e é refletida é igual a $A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 F_{i-n} \rho_n$. Sob a hipótese de que a energia emitida e refletida possuem a mesma distribuição espectral, a fração $G_{n-j}(A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 F_{i-n} \rho_n)$, então, atinge A_j e é absorvida. Sendo assim, computando agora toda energia absorvida em A_j , originalmente emitida por A_i , obtemos a seguinte expressão

$$A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 F_{i-j} \epsilon_j + \left(A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 F_{i-1} \rho_1 G_{1-j} + A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 F_{i-2} \rho_2 G_{2-j} + \dots + A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 F_{i-N} \rho_N G_{N-j} \right) \quad (4.16)$$

Dividindo esta energia pela emissão total de A_i , tem-se

$$G_{i-j} = F_{i-j} \epsilon_j + F_{i-1} \rho_1 G_{1-j} + F_{i-2} \rho_2 G_{2-j} + \dots + F_{i-N} \rho_N G_{N-j} \quad (4.17)$$

Fazendo j variar de 1 a N , obtemos o seguinte sistema de equações relativo à superfície k , aqui expresso em forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 - \rho_1 F_{1-1} & -\rho_1 F_{1-2} & \dots & -\rho_1 F_{1-N} \\ -\rho_2 F_{2-1} & 1 - \rho_2 F_{2-2} & \dots & -\rho_2 F_{2-N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\rho_N F_{N-1} & -\rho_N F_{N-2} & \dots & 1 - \rho_N F_{N-N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_{1-k} \\ G_{2-k} \\ \dots \\ G_{N-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1-k} \epsilon_1 \\ F_{2-k} \epsilon_2 \\ \dots \\ F_{N-k} \epsilon_N \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

O sistema linear acima depende apenas de valores conhecidos e, portanto, pode ser resolvido para G_{1-k} , G_{2-k} , ..., G_{N-k} . Note que, como estamos tratando com superfícies opacas e cinzas, $\rho = 1 - \epsilon$. A utilização do índice k , significa que a solução do sistema acima obtém os fatores G para apenas uma superfície da cavidade de cada vez, logo devemos repetir os cálculos para todas as outras.

Analizando a Eq.(4.18) para todas as outras superfícies, verificamos que estas possuem a mesma matriz de coeficientes, podendo a expressão acima ser escrita de maneira genérica, para todas as superfícies como

$$G_{k-j} = m^{-1} \cdot f \quad (4.19)$$

onde

$$G_{k-j} = \begin{pmatrix} G_{1-1} & G_{1-1} & \dots & G_{1-1} \\ G_{2-1} & G_{1-1} & \dots & G_{1-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N-1} & G_{1-1} & \dots & G_{1-1} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$m^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \rho_1 F_{1-1} & -\rho_2 F_{1-2} & \dots & -\rho_N F_{1-N} \\ -\rho_1 F_{2-1} & 1 - \rho_2 F_{2-2} & \dots & -\rho_N F_{2-N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\rho_1 F_{N-1} & -\rho_2 F_{N-2} & \dots & 1 - \rho_N F_{N-N} \end{pmatrix}^{-1} \quad (4.21)$$

$$f = \begin{pmatrix} F_{1-k} \epsilon_1 & F_{1-k} \epsilon_1 & \dots & F_{1-k} \epsilon_1 \\ F_{2-k} \epsilon_2 & F_{1-k} \epsilon_1 & \dots & F_{1-k} \epsilon_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N-k} \epsilon_N & F_{1-k} \epsilon_1 & \dots & F_{1-k} \epsilon_1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Analizando as expressões anteriores, podemos perceber que o esforço computacional para o cálculo dos fatores G se resume na inversão da matriz m . Assim, temos que o esforço computacional despendido neste método é o mesmo que para o método das radiosidades, pois a matriz de coeficientes que necessita ser resolvida para o método de Gebhart é exatamente a transposta da matriz a ser resolvida para o cálculo das radiosidades.

De posse dos coeficientes G , que serão daqui por diante chamados de acoplamentos radiativos, podemos derivar um conjunto de relações que são úteis para deduzirmos uma expressão simples para o cálculo da troca de calor radiativa líquida em uma superfície.

Se impusermos a condição de que a temperatura entre duas superfícies A_i e A_j são idênticas, a troca de calor entre elas deverá ser nula, assim deduzimos uma equação de reciprocidade que possui a seguinte forma

$$A_i \epsilon_i G_{i-j} = A_j \epsilon_j G_{j-i} \quad (4.23)$$

Podemos também observar, que a energia total emitida por uma superfície A_i deve obedecer a seguinte expressão

$$A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 = A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 G_{i-1} + A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 G_{i-2} + \dots + A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 G_{i-N} = A_i \epsilon_i \sigma T_i^4 \sum_{j=1}^N G_{i-j} \quad (4.24)$$

dividindo por $A_i \epsilon_i \sigma T_i^4$, tem-se

$$1 = G_{i-1} + G_{i-2} + \dots + G_{i-N} = \sum_{j=1}^N G_{i-j} \quad (4.25)$$

De posse das Eq.(4.23) e (4.25), podemos retornar a (4.15) que fornece a troca líquida de calor em uma superfície e reordená-la da seguinte forma

$$q_i = A_i \epsilon_i \cdot \sum_{j=1}^N G_{i-j} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad (4.26)$$

4.5 Generalização do Método da Radiosidade

Como já ilustrado anteriormente, vimos que para o cômputo da troca líquida de calor proveniente da radiação, os dois métodos apresentados acima necessitam do mesmo custo computacional. O objetivo desta seção é discutir um pouco mais os dois métodos e compará-los do ponto de vista de suas formulações, deduzindo uma expressão oriunda do método das radiosidades que apresenta uma forma similar a Eq.(4.26), expressando a troca líquida de calor em função da temperatura na quarta potência, fornecendo assim uma correlação envolvendo a radiosidade de cada superfície (J) e o acoplamento radiativo (G).

O procedimento que será agora descrito, contém a essência do método da radiosidade, por isso chamado por Sparrow (1963), como generalização do método da radiosidade. O objetivo aqui, da mesma forma com que o método de Gebhart, é expressar as trocas de calor em função de coeficientes que separam os termos de temperatura na quarta potência dos termos geométricos e de propriedades dos materiais.

Consideremos uma cavidade onde somente a superfície A_1 possui uma temperatura T_1 e as outras superfícies possuem valor zero para temperatura. Após isto, definimos uma radiosidade adimensional dada por

$$\gamma^{(1)} = \frac{J}{\sigma T_1^4} \quad (4.27)$$

Substituindo esta expressão na Eq.(4.10), temos o seguinte conjunto de equações lineares para a superfície A_1

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(1)} &= \epsilon_1 + \rho_1 \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(1)} F_{1-k} \\ \gamma_2^{(1)} &= \rho_2 \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(1)} F_{2-k} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.28)$$

Analisando a expressão anterior, podemos verificar que a solução das incógnitas $\gamma^{(1)}$

não dependem de valores de temperatura. Se agora considerássemos uma segunda cavidade onde a superfície A_2 , possuísse uma temperatura T_2 e todas as outras cavidades possuíssem temperatura zero, obteríamos os mesmo conjunto de equações, só que agora as incógnitas seriam $\gamma^{(2)}$. Este procedimento poderia ser repetido para inúmeras outras superfícies e todas resultariam em um conjunto de equações, aonde os seus coeficientes seriam independentes de valores de temperatura.

Consideremos agora a situação aonde a cavidade pode ser substituída por um conjunto de superfícies onde cada uma possui uma temperatura T_i . Este problema pode ser analisado como uma superposição dos diversos problemas acima onde somente uma temperatura de cada vez tem valores não nulos. Em virtude desta linearidade, a solução geral deste problema pode ser obtida somando-se as soluções dos sub-problemas anteriores, resultando em

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \gamma_1^{(1)} \sigma T_1^4 + \gamma_2^{(1)} \sigma T_2^4 + \dots + \gamma_N^{(1)} \sigma T_N^4 \\ \gamma_2 &= \gamma_1^{(2)} \sigma T_1^4 + \gamma_2^{(2)} \sigma T_2^4 + \dots + \gamma_N^{(2)} \sigma T_N^4 \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\quad (4.29)$$

A Eq.(4.29) pode ser reescrita de maneira simplificada utilizando uma relação de reciprocidade que existe entre os vários $\gamma^{(i)}$. Esta relação, deduzida no texto de Sparrow (1963), possui a seguinte forma:

$$\frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i} A_i \gamma_i^{(k)} = \frac{\epsilon_k}{1 - \epsilon_k} A_k \gamma_k^{(i)} \quad (4.30)$$

Introduzindo a equação anterior na Eq.(4.29), temos a expressão geral para a radiosidade dada por

$$J_i = \frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i A_i} \sum_{k=1}^N \frac{\epsilon_k A_k}{1 - \epsilon_k} \gamma_k^{(i)} \sigma T_k^4 \quad (4.31)$$

Analisando a Eq.(4.31), podemos perceber que a expressão final para J_1 , por exemplo, contém somente expressões de $\gamma_k^{(1)}$. O mesmo é válido para as outras superfícies. Isto significa que caso estejamos interessados somente na troca líquida para a superfície A_1 , precisamos somente resolver o conjunto de equações fornecido pela Eq.(4.28).

Visando a determinação de uma relação semelhante a expressão final do método de Gebhart para as trocas radiativas, podemos novamente retomar a cavidade onde somente a superfície A_1 , possui uma temperatura T_i e as outras superfícies possuem valor zero para temperatura. Da Eq.(4.13) a troca de calor para cada superfície vale

$$\begin{aligned}
q_i &= \frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i} (1 - \gamma_i^{(i)}) \sigma T_i^4 A_i \\
q_k &= -\frac{\epsilon_k}{1 - \epsilon_k} (1 - \gamma_k^{(i)}) \sigma T_i^4 A_k \quad k \neq i
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Como o balanço de energia na cavidade exige que a soma do calor líquido para todas as superfícies seja zero, manipulando a expressão anterior, obtém-se

$$\frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i} A_i = \sum_{k=1}^N \frac{\epsilon_k}{1 - \epsilon_k} \gamma_k^{(i)} A_k \tag{4.33}$$

Finalmente, de maneira análoga a anterior, extrapolando para uma cavidade que possui um conjunto de superfícies onde cada uma possui uma temperatura T_i , aplicando a Eq.(4.13) para uma superfície típica A_i e introduzindo J_i da Eq.(4.31), resulta na seguinte expressão para a troca líquida de calor nesta superfície

$$q_i = \frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i} A_i \sigma T_i^4 - \sum_{k=1}^N \frac{\epsilon_k}{1 - \epsilon_k} \gamma_k^{(i)} A_k \sigma T_k^4 \tag{4.34}$$

Eliminando o primeiro termo da expressão anterior utilizando a Eq.(4.33), obtemos

$$q_i = \sum_{k=1}^N \frac{\epsilon_k}{1 - \epsilon_k} \gamma_k^{(i)} A_k \sigma (T_i^4 - T_k^4) \tag{4.35}$$

Analisando a expressão anterior, podemos perceber muita similaridade com a expressão semelhante fornecida pelo método de Gebhart [Eq.(4.26)], pois ambas expressam a troca líquida de calor para cada superfície em função da temperatura na quarta potência e de parâmetros escritos em função do fator de forma e de suas propriedades. Realizando uma análise mais precisa, sabendo que as expressões fornecem resultados idênticos, podemos então concluir que existe uma correspondência entre os valores da radiosidade (J) e o acoplamento radiativo (G) dado por

$$G_{i-k} = \frac{\gamma_i^{(k)}}{1 - \epsilon_i}, \quad G_{i-i} = \frac{\gamma_i^{(i)} - \epsilon_i}{1 - \epsilon_i} \tag{4.36}$$

Apesar dos métodos de Gebhart e da radiosidade realizarem balanços focalizando grandezas diferentes (Fig.4.5), eles fornecem os mesmos valores para a troca líquida de calor radiativa para cada superfície conforme esperado. Foi também ilustrado que quando estamos somente preocupados com o cálculo das trocas radiativas entre superfícies, os esforços computacionais são os mesmos.

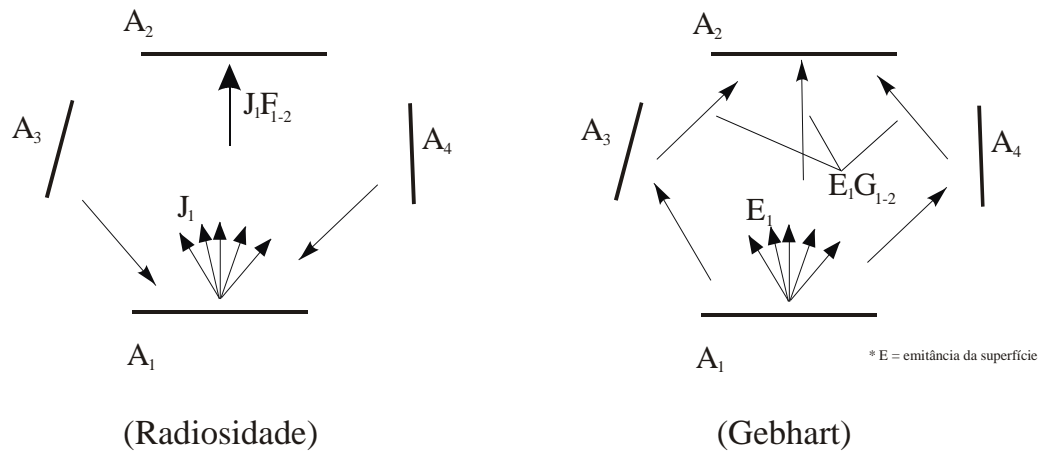


Figura 4.5– Grandezas envolvidas no método de Gebhart e no método das Radiosidades

Entretanto, quando estamos interessados no acoplamento da radiação com outros modos de transferência calor, como condução por exemplo, dependendo de como será realizado o procedimento de solução do problema completo, a eficiência computacional poderá ser diferente. Este assunto será o enfoque do próximo capítulo.

5 Solução Numérica do Problema Radiativo-Conduutivo

O objetivo deste capítulo é apresentar os detalhes numéricos necessários para a solução do problema acoplado de transferência de calor por condução e radiação. Os métodos para resolver o problema das trocas radiativas entre superfícies difusas e cinzentas foram apresentados no capítulo anterior. Com relação a modelagem do problema condutivo, foi assumida a simplificação de que as superfícies são formadas por um conjunto de cascas finas. Esta simplificação faz com que o problema da difusão de calor seja tratado como um problema bi-dimensional em geometrias arbitrárias.

5.1 Discretização Geométrica

O presente trabalho divide as superfícies em questão em um número finito de triângulos, refinados e posicionados de acordo com um critério definido pelo usuário. Nestes triângulos é calculado o fator de forma entre as superfícies, quando utilizamos o método da Radiosidade ou o método de Gebhart. É nesta malha que calculamos os acoplamentos radiativos entre as superfícies em questão. Assim, tanto para o fator de forma e conseqüentemente para os dois métodos de cálculo das trocas radiativas (Gebhart e Radiosidade) utilizamos a mesma discretização, que a partir de agora será chamada de malha radiativa.

Em virtude do cálculo do fator de forma ser uma das partes mais demoradas do processo e, em geral, a radiação não fornecer gradientes de temperatura muito grandes nas superfícies, esta malha radiativa quase sempre não apresenta um número muito grande de elementos. Por outro lado, como no fenômeno da condução podemos ter gerações de calor e condições de contorno variáveis que podem criar grandes gradientes locais de temperatura, para a grande maioria dos problemas necessitamos de uma maior resolução para a malha condutiva do que radiativa. Em busca de eficiência, a metodologia desenvolvida permite que utilizemos uma discretização diferente da radiativa para o problema difusivo. Esta discretização condutiva, utiliza a malha radiativa como base e simplesmente é resultado da subdivisão dos triângulos

que compõem a malha radiativa de acordo com um critério definido pelo usuário. Esta subdivisão é realizada de maneira simples e consiste na união dos pontos médios de cada lado do triângulo, resultando em quatro novos triângulos a cada sub-divisão. O número de subdivisões é também definido pelo usuário. A figura a seguir, ilustra a malha radiativa e malha condutiva com vários níveis de sub-divisão para a malha condutiva. Maiores detalhes com relação a discretização podem ser obtidos no trabalho de Maliska Jr. (2001).

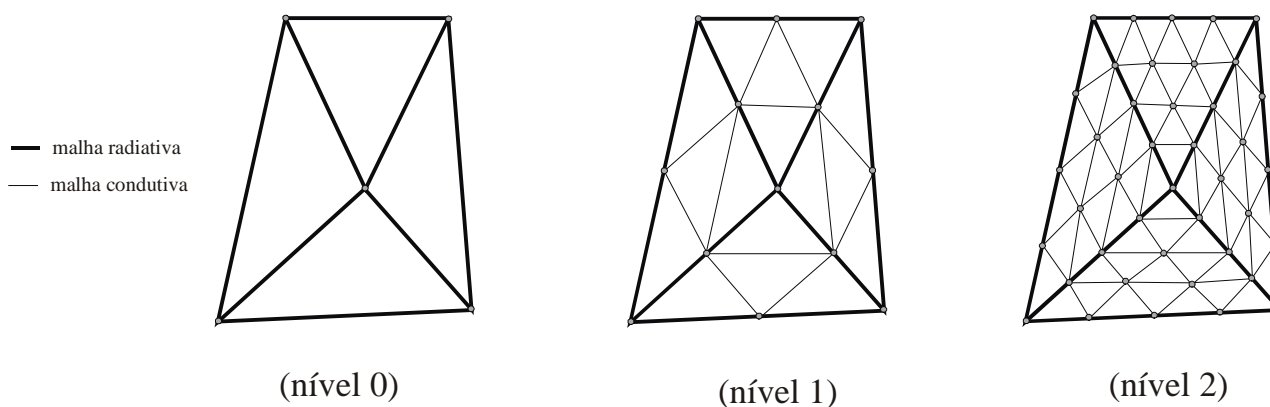


Figura 5.1 –Malhas radiativa e condutiva

Assim, analisando a Fig.5.1, podemos ver que o número de elementos da malha condutiva é sempre igual ou maior aos da malha radiativa. Uma outra característica importante é que sempre um número fixo de elementos condutivos estão inteiramente contidos em um elemento da malha radiativa. Este fato simplifica em muito os cálculos dos fluxos e aproximações que serão adotados para o acoplamento destas soluções.

5.2 A Vizinhança

Outro fator importante a ser apresentado antes da introdução dos aspectos numéricos é a consideração da vizinhança (espaço ao redor) no sistema. No Capítulo 4 foi mostrado que para o cômputo das trocas radiativas entre superfícies difusas cinzentas é sempre interessante possuímos uma cavidade ao redor dos elementos em consideração. Como é comum utilizarmos o sistema computacional em questão para a análise de elementos geométricos que não constituem uma cavidade fechada, se faz interessante definirmos a vizinhança como sendo uma superfície com temperatura e propriedades fixas que envolve todas as outras superfícies do problema. No caso de tratarmos de aplicações espaciais, como o controle

térmico de satélites, estaremos representando a vizinhança como uma superfície negra a 4 K.

É importante salientar que para a representação da vizinhança, não é necessário a construção geométrica de superfícies que envolvam os elementos em análise. Esta tarefa é realizada implicitamente no cálculo do fator de forma. No capítulo 3, já foi apresentado que quando estamos lidando com uma cavidade fechada a soma do fator de forma de cada elemento para as demais superfícies deve ser igual a unidade. Assim, após o cômputo dos fatores de forma, é verificado se a soma dos fatores de forma de cada elemento para as demais superfícies é igual a 1 mais ou menos uma tolerância especificada. Se isto for verdadeiro, a superfície em questão se encontra em uma cavidade fechada, caso o contrário aconteça, é atribuído à vizinhança o restante do valor do fator de forma, de acordo com a seguinte expressão

$$F_{i-\text{espaço}} = 1 - \sum_{j=1}^N F_{i-j} \quad (5.1)$$

O mesmo pode ser realizado quando estamos tratando dos acoplamentos radiativos entre as superfícies utilizando o método de Gebhart.

5.3 Solução da Equação da Condução de Calor

Apesar da metodologia em uso, *Control Volume Finite Element*, conter a denominação de elementos finitos, de acordo com Maliska (1995), é um procedimento classificado como de volumes finitos em função das equações serem obtidas através de balanços, neste caso de energia. A denominação de elementos finitos vem pela forma da montagem das equações e pelo uso de funções de interpolação utilizadas no método tradicional de elementos finitos.

De acordo com o Capítulo 2, a equação da condução de calor para uma geometria 2D em regime permanente, no sistema coordenado cartesiano é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} = 0 \quad (5.2)$$

Se definirmos um fluxo \vec{J} , por

$$\vec{J} = -k \nabla T \quad (5.3)$$

a Eq.(5.2) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} \right) - \dot{q} = 0 \quad (5.4)$$

O objetivo deste método numérico é a aproximação das equações diferenciais acima descritas por um sistema de equações algébricas obtidas através de um balanço realizado em volumes de controle construídos na malha condutiva. Então, o próximo passo a ser seguido é a integração da equação diferencial em sua forma conservativa neste volume de controle elementar criado pelo método da mediana.

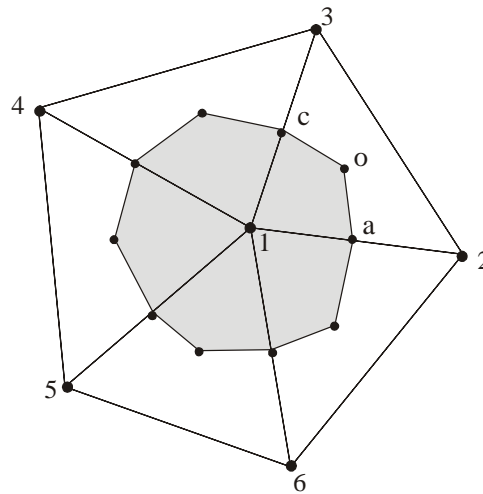


Figura 5.2 – Volume de controle para o método da mediana criado na malha condutiva

Assim, o volume de integração mostrado anteriormente, em uma malha triangular é criado pela união dos centróides com as medianas de cada triângulo. O volume de controle (hachurado) mostrado na Fig. 5.2 é composto por contribuições de diversos elementos do tipo 123, mostrado na Fig. 5.3.

A integração da Eq.(5.4) usando o teorema da divergência, no volume de controle mostrado resulta em

$$\int_a^0 \vec{J} \cdot \vec{n} ds + \int_b^c \vec{J} \cdot \vec{n} ds - \int_{a0c} \dot{q} dV + [Contribuições de outros elementos associados ao nó 1] = 0 \quad (5.5)$$

Observe que a integração dada pela Eq.(5.5) requer o valor da derivada de T ao longo das linhas \overline{ao} e \overline{oc} . Os valores de T , por outro lado, são armazenados nos vértices dos elementos triangulares. É necessário, portanto, o estabelecimento de uma função de interpolação para T . Tal função de interpolação deve, a partir do conhecimento de T nos

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,840 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:58 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 155 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

vértices dos triângulos, permitir o cálculo de T e de suas derivadas em qualquer posição dentro do elemento triangular. Especialmente os valores das derivadas de T serão necessários nos pontos t e r , conforme mostra a Fig.5.3.

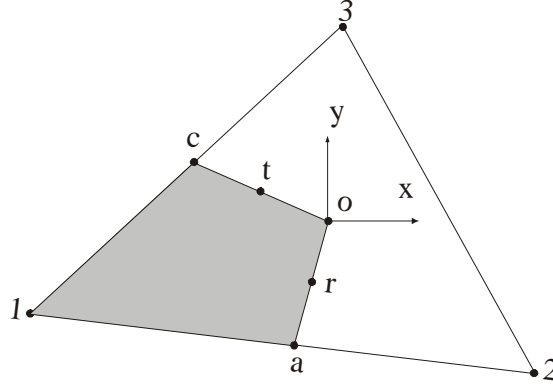


Figura 5.3 – Elemento triangular

Por estarem presentes apenas efeitos difusivos, a função de interpolação utilizada pode ser linear, dada por

$$T = Ax + By + C \quad (5.6)$$

Com os valores de T_1 , T_2 e T_3 e os valores das coordenadas (x, y) nos pontos 1, 2 e 3, encontramos as constantes A , B e C (Maliska, 1995), como

$$A = \frac{[(y_2 - y_3)T_1 + (y_3 - y_1)T_2 + (y_1 - y_2)T_3]}{D} \quad (5.7)$$

$$B = \frac{[(x_3 - x_2)T_1 + (x_1 - x_3)T_2 + (x_2 - x_1)T_3]}{D} \quad (5.8)$$

$$C = \frac{[(x_2 y_3 - x_3 y_2)T_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)T_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)T_3]}{D} \quad (5.9)$$

com D dado por

$$D = (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3) \quad (5.10)$$

Lembrando que o vetor fluxo é dado por

$$\vec{J} = J_x \vec{i} + J_y \vec{j} = \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \vec{j} \quad (5.11)$$

e obtendo o valor das derivadas da T através da função de interpolação, as componentes do fluxo \vec{J} resultam em

$$J_x = -Ak, J_y = -Bk \quad (5.12)$$

Portanto, podemos expressar as integrações ao longo de \overline{ao} e \overline{oc} com as seguintes expressões

$$\int_a^o \vec{J} \cdot \vec{n} dS = (Ak)y_a - (Bk)x_a \quad (5.13)$$

$$\int_o^c \vec{J} \cdot \vec{n} dS = (Ak)y_c - (Bk)x_c \quad (5.14)$$

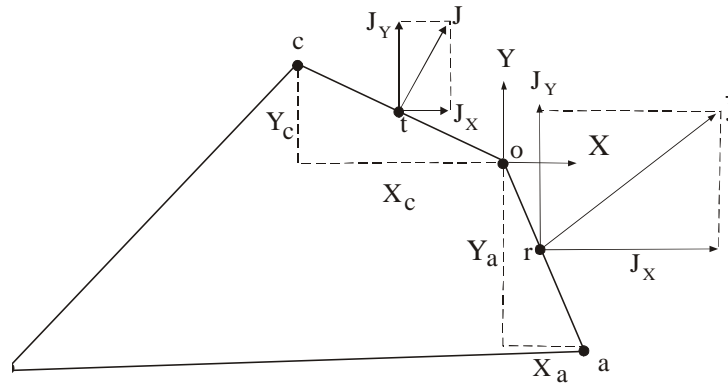


Figura 5.4 – Representação de \vec{J} nas interfaces de integração

A Fig.5.4 extraída de Maliska (1995), apresenta a interpretação geométrica das integrações dadas pelas Eq.(5.13) e (5.14). Considerando o vetor \vec{J} nos pontos r e t , $J_x y_a + J_y x_a$ nos dá o fluxo que atravessa a face \overline{ao} , e $-J_x y_c + J_y x_c$ calcula o fluxo em \overline{oc} . Os sinais que aparecem estão de acordo com o sistema de eixo centrado em o .

A integração ao longo da superfície pertencente ao elemento $\overline{123}$ resulta portanto, em

$$\int_a^0 \vec{J} \cdot \vec{n} ds + \int_b^c \vec{J} \cdot \vec{n} ds - \int_{a0c} \dot{q} dV = C_1 T_1 + C_2 T_2 + C_3 T_3 + B_1 \quad (5.15)$$

onde os coeficientes são dados por

$$C_1 = \frac{k}{D} [(y_a - y_c)(y_2 - y_3) + (x_a - x_c)(x_2 - x_3)] \quad (5.16)$$

$$C_2 = \frac{k}{D} [(y_a - y_c)(y_3 - y_1) + (x_a - x_c)(x_3 - x_1)] \quad (5.17)$$

$$C_3 = \frac{k}{D} [(y_a - y_c)(y_1 - y_2) + (x_a - x_c)(x_1 - x_2)] \quad (5.18)$$

$$B_1 = -\left| \frac{D}{2} \right| \frac{1}{3} \dot{q} \quad (5.19)$$

É fácil ver que, quando a parcela correspondente aos outros elementos for adicionada, teremos uma equação algébrica para o volume de controle centrado em 1 que conecta este volume de controle com todos os seus vizinhos, como esperado, na forma

$$A_i T_i = \sum_{vizinhos} A_{vizinhos} T_{vizinhos} + B_i \quad (5.20)$$

Vale a pena salientar que para o problema da condução de calor, o presente estudo considera aplicação das condições de contorno de fluxo nulo na sua fronteira. Uma outra situação possível é a presença de nós com temperaturas fixas, sendo que isto pode acontecer a qualquer nó, esteja ele no interior ou na fronteira do domínio. Caso a temperatura do nó seja conhecida ele é retirado da matriz final, diminuindo o número de incógnitas a serem resolvidas.

5.4 Acoplamento das Soluções Condutivas e Radiativas

As seções seguintes descrevem duas estratégias capazes de realizar o acoplamento da solução do problema difusivo com o problema das trocas radiativas entre as superfícies. Em virtude dos dois problemas, condutivo e radiativo, serem função da temperatura, adicionados ao fato de que o fluxo radiativo é escrito em função da temperatura na quarta potência, temos que acoplamento resultante entre estas duas equações apresenta a característica de ser fortemente não linear. O tratamento destas não-linearidades também constitui um dos focos

principais deste texto.

5.4.1 Acoplamento com o Método da Radiosidade

Uma possibilidade para solução de problemas radiativos e condutivos simultâneos constitui em um algoritmo que utilize o método CVFEM descrito na seção anterior e o método da radiosidade para o cômputo da troca radiativa entre as superfícies. Em virtude da não linearidade existente, um processo iterativo entre as duas etapas é necessário para a obtenção da convergência. A seguir, a implementação que foi utilizada neste estudo é descrita e comentada.

Considere um conjunto de superfícies discretizadas aonde possuímos uma malha radiativa e uma malha condutiva, conforme o procedimento descrito na seção 5.1. Consideremos também um problema aonde todas as propriedades térmicas e ópticas das superfícies estão definidas, a matriz do fator de forma já calculada e desejamos conhecer o campo de temperaturas em regime permanente. Assim, a seguinte metodologia de solução é então empregada:

1. Como todo procedimento iterativo, o primeiro passo é fornecer um campo de temperaturas aos nós condutivos como um estimativa inicial ao processo.
2. A seguir, para cada elemento radiativo, uma média envolvendo os nós condutivos no seu interior é realizada para conhecermos os valores de temperatura nas suas faces. Esta etapa se encontra ilustrada na Fig.5.5 .
3. Conhecendo o valor desta temperatura, calcula-se a matriz de radiosidades conforme descrito na Seção 4.3 do capítulo anterior utilizando um *solver* iterativo ou um método direto de inversão de matriz.
4. Com a matriz de radiosidades conhecida, facilmente obtemos o fluxo líquido de calor em cada superfície radiativa de acordo com a Eq.(4.13).
5. Transporta-se agora os fluxos radiativos para os volumes de controle dos elementos condutivos, sendo realizada uma divisão ponderada pela área de cada triângulo e posteriormente dividida pela área que cada elemento ocupa no volume de controle mostrado na Fig.5.2, ou seja, um terço da área total do triângulo condutivo. Esta etapa também se encontra ilustrada na Fig.5.5 .
6. Resolve-se então a parte difusiva do problema nos volumes de controle condutivos, sendo

que os fluxos radiativos calculados anteriormente são adicionados como termos fonte da Eq.(5.20), como descrito no item 5. Em virtude da não linearidade entre as equações e dos valores altos que este termo pode assumir (oriundos dos fluxos radiativos) uma sub-relaxação aplicada a este termo fonte deve ser utilizada para evitarmos problemas de instabilidade e divergência da solução do problema. A sub-relaxação utilizada neste estudo segue a seguinte expressão, descrita por Maliska (1995).

$$q_i^{k+1} = wq_i^{k+1} + (1-w)q_i^k \quad (5.21)$$

Sendo k , o nível iterativo e w um coeficiente de relaxação definido pelo usuário. Analisando a equação anterior, temos que para valores de w menores do que 1, o termo fonte é sub-relaxado. Isto significa que a cada iteração somente uma parcela do mais recente valor do termo fonte será adicionado ao valor atual, fazendo com que a solução caminhe de maneira mais ‘suave’ para a convergência entre as duas equações.

7. De posse deste novo campo de temperaturas nos nós condutivos, retorna-se ao item 2 e o processo é novamente repetido. Isto é realizado até que a variação da temperatura de cada nó se estabilize ou sua variação esteja dentro de um valor previamente definido pelo usuário.

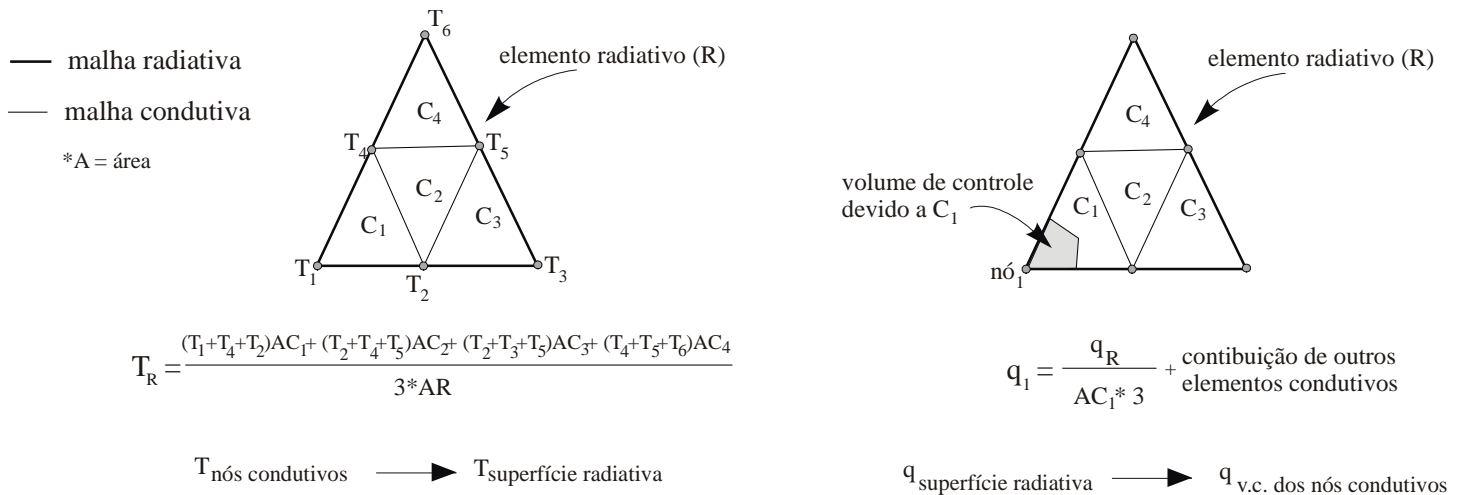


Figura 5.5 – Transferência de fluxos e temperatura nas malhas condutivas e radiativas

O método descrito acima possui a característica de resolver os problemas de condução e radiação sucessivos, utilizando um processo iterativo para a obtenção da convergência. A única ligação entre as duas equações consiste na aplicação dos fluxos radiativos calculados

pelo método da radiosidade como termos fonte na equação da condução de calor. Este procedimento possui a vantagem de que a montagem das matrizes de radiosidades e condução e sua posterior solução, são processos triviais e podem facilmente serem resolvidas por qualquer solver iterativo. Por outro lado, esta metodologia não possui um nível de acoplamento tão forte entre as duas equações, caracterizando um método explícito de solução entre a parte difusiva e radiativa, pois quando estamos resolvendo a parte radiativa, admitimos que todos os fluxos condutivos são constantes e vice-versa. Esta forma explícita de solução, como será mostrado adiante, dependendo do problema, possui a característica de ser muito instável e bastante sensível ao coeficiente de relaxação apresentado anteriormente.

5.4.2 Acoplamento com o Método de Gebhart

Uma outra estratégia de solução para os problemas radiativos e condutivos simultâneos constitui em um algoritmo que utilize o método CVFEM descrito na seção anterior e o método de Gebhart para o cômputo da troca radiativa entre as superfícies.

A união deste dois métodos fica melhor entendida quando prestamos atenção nas expressões resultantes dos fluxos entre os elementos envolvidos.

Do método CVFEM temos que a Eq.(5.15) expressa o balanço de fluxos de calor em cada volume de controle elementar, onde as constantes C_1 , C_2 e C_3 podem ser entendidas como uma espécie de acoplamentos condutivos entre os nós 1, 2 e 3. De maneira semelhante, a Eq.(4.26) do método de Gebhart nos fornece uma expressão para o fluxo de calor radiativo entre as superfícies que estão acopladas radiativamente.

Após calculado o acoplamento radiativo entre as superfícies podemos obter os valores destes acoplamentos para cada volume de controle centrado em um nó qualquer em função dos valores dos acoplamentos radiativos da superfície na qual este nó está contido. Este procedimento será mais detalhado adiante.

De posse da Eq.(5.15) e da Eq.(4.26) agora expressa em termos dos nós, podemos realizar um balanço de energia para cada volume de controle, envolvendo simultaneamente os fluxos condutivos e radiativos da seguinte maneira

$$C_i T_i + B_i + \sum_{\text{nós vizinhos de } i} C_v T_v + A_i \epsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{\text{v.c. acoplados rad.}} G_{i-j} \sigma (T_i^4 - T_j^4) = 0 \quad (5.22)$$

Resolvendo o sistema de equações acima, obteremos valores de temperatura para cada nó condutivo i . Como o sistema de equações acima é não linear, em virtude de apresentar a

temperatura na quarta potência, ele precisa inicialmente ser linearizado para depois ser resolvido. Para esta tarefa, o presente estudo sugere uma linearização utilizando o método de Newton (Dembo *et al.*, 1982).

No método de Newton, o conjunto das equações não-lineares discretizadas [Eq.(5.22)] que regem o problema, pode ser escrito na forma de “equações resíduos”, dada por

$$F(T) = [f_1(T) \quad f_2(T) \quad \dots \quad f_n(T)]^T = 0 \quad (5.23)$$

onde n é número de nós da malha condutiva. Aplicando o método de Newton, a cada iteração é resolvido o seguinte sistema linear

$$J^k \cdot \delta T^k = -F(T^k) \quad (5.24)$$

onde, J é a matriz jacobiana, δT é vetor variação da temperatura, $F(T)$ é o resíduo da Eq.(5.22) e k refere-se a iteração newtoniana. Cada elemento da matriz jacobiana é representado pela derivada da Eq.(5.22) em relação à temperatura, dada por

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial T_j} \quad (5.25)$$

O sistema não-linear converge quando

$$\|F(T^k)\|_2 < tolF \cdot \|F(T^o)\|_2, \text{ e} \quad (5.26)$$

$$\|\delta T^k\|_2 < tolDelta \cdot \|T^{k+1}\|_2 \quad (5.27)$$

onde $tolF$ e $tolDelta$ são tolerâncias definidas pelo usuário.

Para a inversão da matriz jacobiana podemos utilizar um solver iterativo ou um solver direto. Ao utilizarmos um processo iterativo para a solução do sistema linear o método de Newton resultante é chamado na literatura de Método de Newton Inexato ou Método de Newton – *Krylov* (Dembo *et al.*, 1982).

Uma vez convergido este conjunto de equações possuiremos o campo de temperaturas nos nós condutivos.

De acordo com a Eq.(5.22), temos que transportar os valores dos acoplamentos radiativos que foram calculados entre as superfícies da malha radiativa para os volumes de controle centrados ao redor do nó i . Isto é realizado com um pouco de algebrismo e utilizando

as relações para G_{i-j} fornecidas no Capítulo 4. A figura a seguir ilustra esta operação.

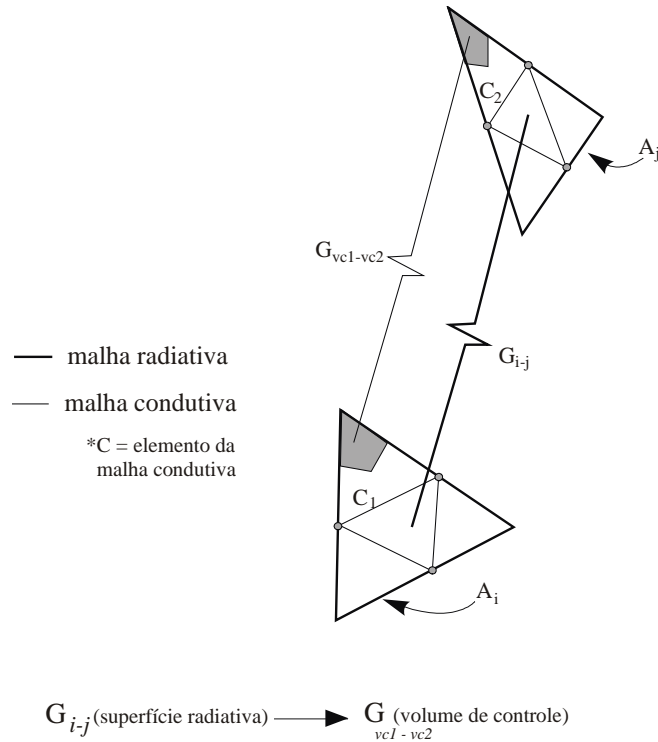


Figura 5.6 – Transferência dos acoplamentos radiativos das superfícies para os volumes de controle

A expressão para obtermos o acoplamento radiativo entre dois volumes de controle utilizando valores dos acoplamentos das superfícies radiativas é obtido em dois passos consecutivos:

- O primeiro passo consiste em obtermos os valores dos acoplamentos radiativos entre os triângulos da malha condutiva das quais estes volumes de controle fazem parte. Sabendo que a sub-divisão que gera a malha condutiva sempre fornece triângulos do mesmo tamanho, utilizando relações de reciprocidade, e assumindo a hipótese simplificativa de que G_{i-j} é constante ao longo das superfícies A_i e A_j , podemos facilmente demonstrar que:

$$G_{vc1-vc2} = \frac{G_{i-j}}{n_j} \quad (5.28)$$

onde n_j é o numero de sub-elementos condutivos contidos na superfície radiativa A_j .

- O segundo passo consiste em transferir os acoplamentos já calculados para os triângulos condutivos para os volumes de controle ao redor de cada nó. Este processo é concluído pela simples divisão da expressão anterior pela área de cada

triângulo contida no volume de controle em questão. Como o volume de controle é criado a partir da união das medianas dos triângulos, a área associada a cada volume de controle é um terço da área do triângulo. Este processo precisa ser repetido para cada triângulo condutivo ao redor do nó de interesse, o que fornece a seguinte expressão:

$$G_{vc1-vc2} = \sum_{\text{triângulos entorno de } i} \frac{G_{i-j}}{3 \cdot n_j} \quad (5.29)$$

A principal característica deste método consiste no forte acoplamento entre as duas equações. Isto acontece em virtude da utilização do método de Newton, aonde as duas equações são resolvidas simultaneamente. Por outro lado, como desvantagem, temos que sempre transportar os acoplamentos radiativos das superfícies para os volumes de controle condutivos. Esta operação pode ser muito custosa computacionalmente, pois quando temos uma malha condutiva bastante refinada comparada com a malha radiativa, o sistema necessitará de mais tempo para montar a matriz final, do que para sua própria solução.

6 Resultados e Discussões

O presente capítulo tem o objetivo de apresentar os resultados e descrever os testes realizados para a validação e comparação dos modelos discutidos ao longo do texto. Este capítulo é dividido em duas partes. A primeira apresenta os testes realizados com os métodos de cálculo do fator de forma. A segunda mostra a solução de problemas radiativos-condutivos visando a comparação do método de Gebhart com o método da Radiosidade acoplados à solução da condução de calor nas superfícies. Parâmetros como acurácia e performance computacional são objetos de análise tanto na primeira quanto na segunda parte deste capítulo. Por fim, visando demonstrar a versatilidade dos sistema implementado, um modelo mais ilustrativo é construído e seus resultados apresentados.

6.1 Algumas Observações Quanto às Implementações Computacionais dos Métodos de Cálculo do Fator de Forma

Antes de iniciarmos a discussão sobre os resultados deste trabalho é importante apresentarmos algumas características da implementação computacional dos métodos estudados. Estas características são de extrema importância, pois podem fornecer maior ou menor precisão aos métodos, seguidos de um ganho ou não na eficiência computacional. Estas características são válidas para todos os resultados apresentados ao longo deste capítulo.

- Hemi-Cube: Este método foi implementado possuindo duas características adicionais que o diferem um pouco do método Hemi-Cube tradicional. Para facilitar os cálculos das projeções e *clipping* nas faces do Hemi-Cubo, nesta implementação o mesmo possui um tamanho variável calculado em função da menor aresta da superfície onde ele está posicionado. Este fato, embora facilite os cálculos das projeções, torna o método um pouco mais lento computacionalmente, pois em toda nova posição o fator de forma do centro em relação aos *pixels* das faces precisa ser recalculado. A outra característica desta implementação esta relacionada ao fato de que o método tradicional aproxima o fator de forma de F_{1-2} pelo valor de F_{d1-2} . No método aqui implementado, a superfície A_1 onde o Hemi-Cubo está posicionado pode ser subdividida em triângulos menores em um processo

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,841 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:59 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 155 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

semelhante ao da criação da malha condutiva apresentada no Capítulo 5. Ou seja, para cada subdivisão teremos 4 novos triângulos. Cada uma destas subdivisões será daqui por diante chamada de **nível**; assim, nível 0, 1, 2, significa dividirmos a superfície da malha radiativa em 4, 16 e 64 superfícies menores, respectivamente. Para cada uma destas novas sub-superfícies avaliamos o fator de forma F_{d1-2} e depois realizamos uma média ponderada pela área de cada sub-superfície para obtermos F_{1-2} . Este procedimento de avaliar a integral externa numericamente, (como mostrado na seção 4.2 do Capítulo 3), fornece maior precisão ao método; pois reduz os erros relacionados à violação da hipótese da proximidade.

- **Dupla Discretização:** A variante do método da Dupla Discretização implementado neste estudo utiliza a “aproximação de disco” descrita no Capítulo 3. Como este método necessita da discretização das duas superfícies envolvidas, necessitamos estender os conceitos de nível de discretização de superfície apresentados para o método Hemi-Cube, anteriormente aplicados somente na superfície A_1 (onde posicionamos o Hemi-Cubo), para as duas superfícies envolvidas (A_1 e A_2). Assim, quando neste método aumentamos o nível de discretização da malha radiativa, estamos aumentando o número de sub-elementos de ambas as superfícies em questão. Outro fator importante é que, na presença de superfícies obstrutoras, a implementação deste método utiliza os algoritmos de checagem descritos na seção 3.4.5 do Capítulo 3, visando diminuir o número de superfícies nas quais necessitamos verificar a intersecção dos raios emitidos, aumentando a performance do método.
- **Integral de Contorno:** O método da integral de contorno implementado neste trabalho utiliza a expressão desenvolvida por Mitalas-Stephenson apresentada no Capítulo 3 e a avalia de maneira analítica quando existem contornos adjacentes, como recomendado por Walton (1987). Uma outra recomendação apresentada por Walton (1987) e aqui também implementada é a utilização da técnica da quadratura Gaussiana para avaliação numérica da integral. Além disto, como descrito no Capítulo 3, quando existem obstruções é necessário discretizarmos a superfície que iremos projetar para determinarmos com precisão o contorno da sua sombra. Assim, neste método, também utilizaremos o conceito de nível de discretização, aplicado agora a superfície que será projetada. Vale a pena ressaltar que de maneira diferente do método da Dupla Discretização aqui implementado, o método da Integral de Contorno necessita somente da subdivisão de uma superfície (A_1

ou A_2) do par em consideração. Por outro lado, este método é bem semelhante ao da Dupla Discretização quando temos a presença de obstruções, pois utiliza os mesmos algoritmos de checagem descritos na seção 3.4.5 do Capítulo 3, para diminuir o número de superfícies em consideração e aumentar a performance do método.

6.2 Análise da Precisão dos Métodos de Cálculo do Fator de Forma

Para estudo da precisão dos métodos numéricos para o cálculo do fator de forma foi realizado um conjunto de testes padrão. Estes testes envolveram superfícies simples, mas com resultado analítico do fator de forma entre elas conhecido, sendo portanto úteis para verificação da precisão dos métodos.

6.2.3 Duas Placas Paralelas

O primeiro teste realizado foi o clássico teste das duas placas paralelas. Este teste está ilustrado na Fig.6.1. Ele consiste no cálculo do fator de forma entre duas placas paralelas de tamanho 1×1 , separadas por uma distância d . Nos testes realizados variou-se esta distância de 0,1 a 100 e analisou-se o comportamento dos métodos. A Fig.6.1 também apresenta a discretização das superfícies, ou seja, a malha radiativa contendo as superfícies triangulares onde foi calculado o fator de forma. Os gráficos apresentados são obtidos comparando a solução numérica com a solução analítica apresentada anteriormente pela Fig.3.3. A seguinte equação foi utilizada para o cálculo do erro percentual

$$Erro\% = \frac{F_{i-j}(Numérico) - F_{i-j}(Analítico)}{F_{i-j}(Analítico)} \times 100 \quad (6.1)$$

Valores positivos do erro indicam que o fator de forma foi superestimado, sendo que os valores negativos indicam que o mesmo foi subestimado.

A seguir serão apresentados os resultados obtidos com os métodos apresentados no Capítulo 3.

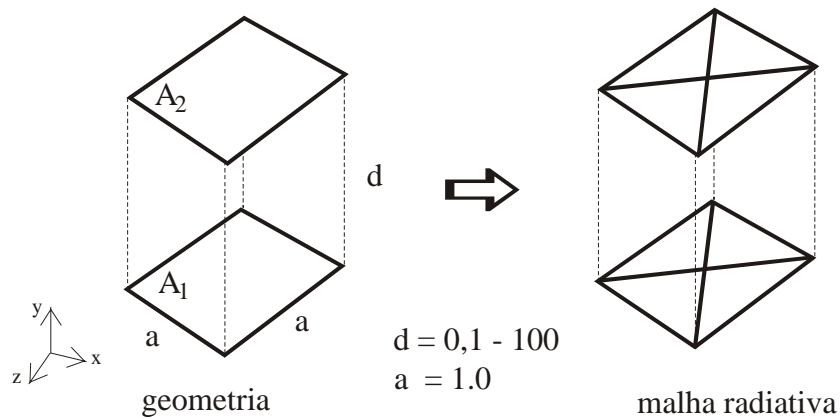


Figura 6.1– Duas placas unitárias paralelas separadas por uma distância d

6.2.3.1 Hemi-Cube

Para a avaliação deste método foram utilizadas diversas resoluções do Hemi-Cubo (4×4 , 10×10 , 20×20 , 50×50 , 100×100 , 200×200 e 500×500). Neste teste foi utilizado o nível 1 de discretização da superfície aonde estamos posicionando o Hemi-Cubo. Assim para cada superfície da malha radiativa apresentada na Fig.6.1 utilizamos 4 sub-superfícies para o cálculo do fator de forma. O gráfico apresentado pela Fig.6.2 demonstra o comportamento do método Hemi-Cube quando variamos a distância d de 0,1 a 100.

2 placas paralelas (1x1) - Hemi-Cube (nível 1)

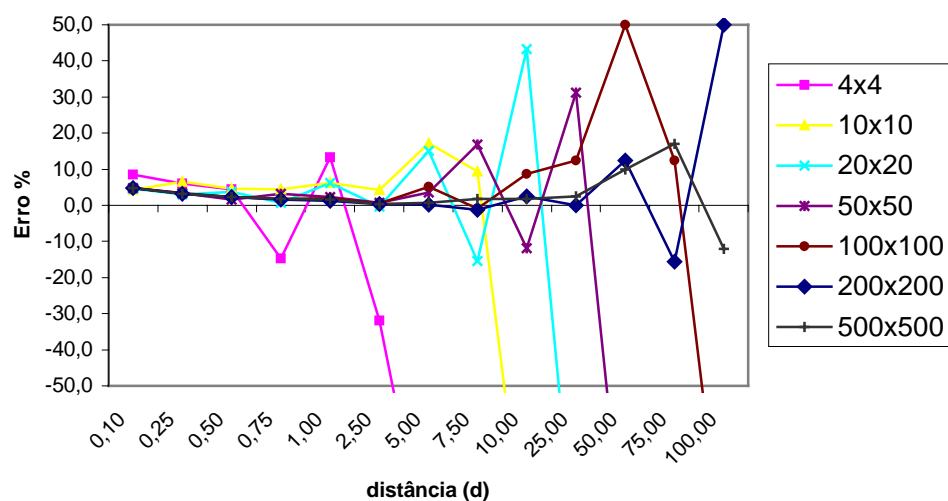
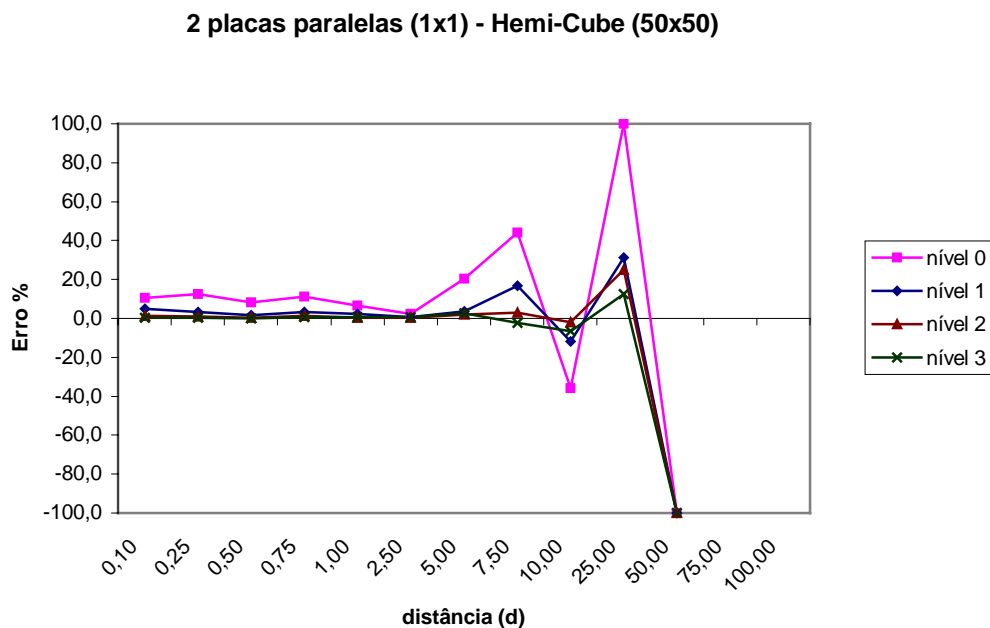


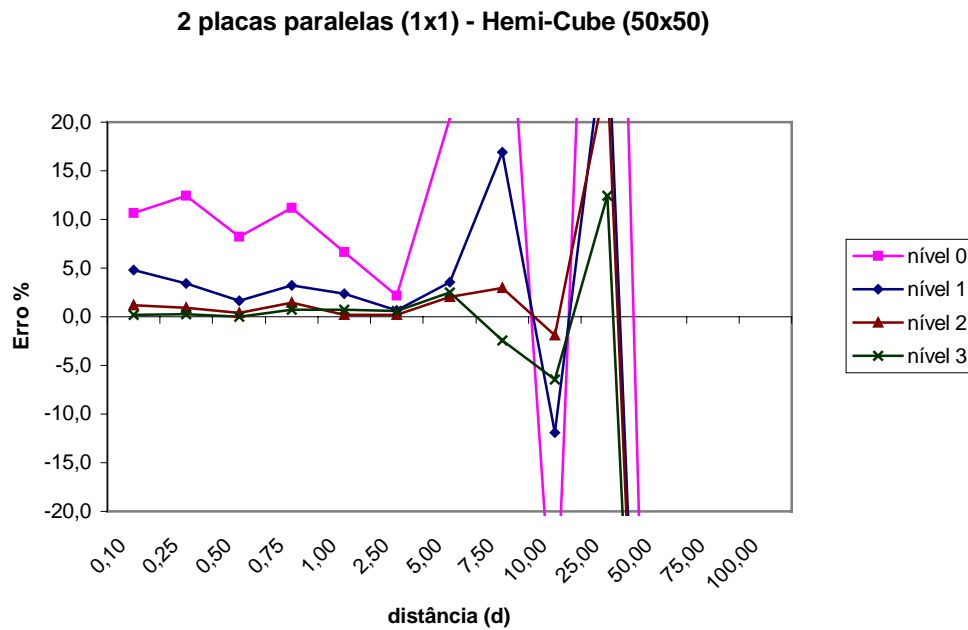
Figura 6.2– Duas placas paralelas – Método Hemi-Cube: Análise da resolução do Hemi-Cube

Analisando a Fig.6.2 podemos perceber que a medida que a distância vai aumentando é necessário uma resolução maior do Hemi-Cubo para que consigamos obter uma melhor precisão do fator de forma. Isto é explicado pelo fato de que a medida que os objetos ficam mais longe, a sua sombra projetada na face do Hemi-Cubo se torna menor, necessitando de uma maior resolução para que possamos defini-la. Conseqüentemente, para uma dada resolução, a partir de uma certa distância nenhum *pixel* se encontrará coberto, resultando em um valor nulo para o fator de forma entre as duas superfícies.

O segundo teste com o método Hemi-Cube foi realizado para estudar o comportamento deste método quando variamos o nível de discretização da superfície aonde estamos posicionando o Hemi-Cubo. Assim, para uma dada resolução fixa (50x50) foram utilizados vários níveis (0, 1, 2 e 3). O resultado é apresentado na Fig.6.3, sendo que o mesmo gráfico, somente com uma nova escala, é apresentado na Fig.6.4. com o objetivo de facilitar a visualização.



**Figura 6.3– Duas placas paralelas – Método Hemi-Cube:
Análise do nível de discretização**



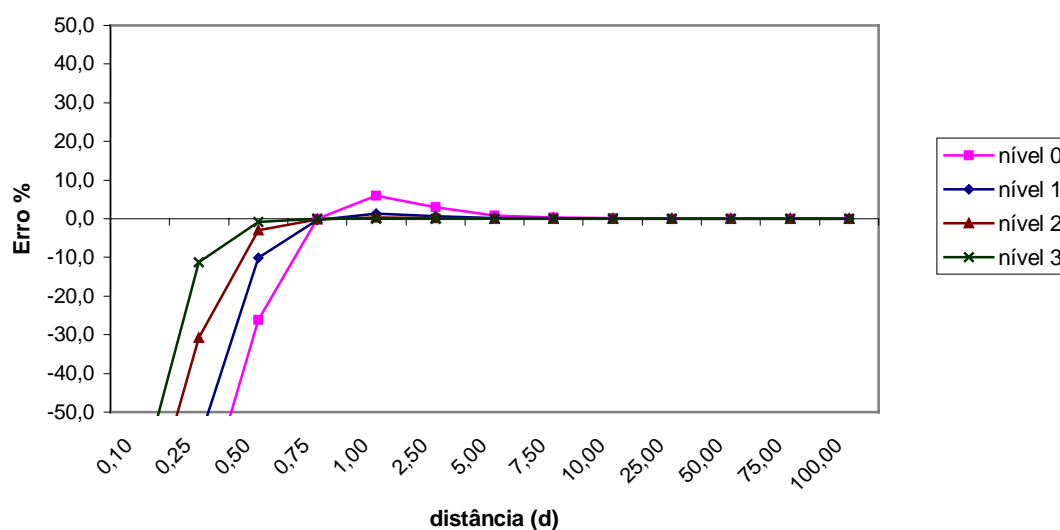
**Figura 6.4– Duas placas paralelas – Método Hemi-Cube:
Análise do nível de discretização (Zoom)**

Analisando a Fig.6.4 podemos concluir que para uma dada distância e uma dada resolução, os erros no cálculo do fator de forma são bastante reduzidos se aumentarmos o nível de discretização da superfície onde estamos posicionando o Hemi-Cubo. Este fato é mais evidenciado para as distâncias d menores que 1,0; pois os erros devido a resolução do Hemi-Cubo (falseamento) são reduzidos e podemos então analisar com melhor clareza a influência de utilizarmos um nível maior de discretização. Isto é uma conclusão lógica do fato de utilizarmos um número maior de pontos para avaliarmos numericamente a integral externa da expressão do cálculo do fator de forma.

6.2.3.2 Dupla Discretização

Os resultados obtidos para o método da Dupla Discretização são apresentados na Fig.6.5. Para cada superfície original da malha radiativa apresentada na Fig.6.1 foi variado o seu nível de discretização de 0 até 3.

2 placas paralelas (1x1) - Dupla Discretização



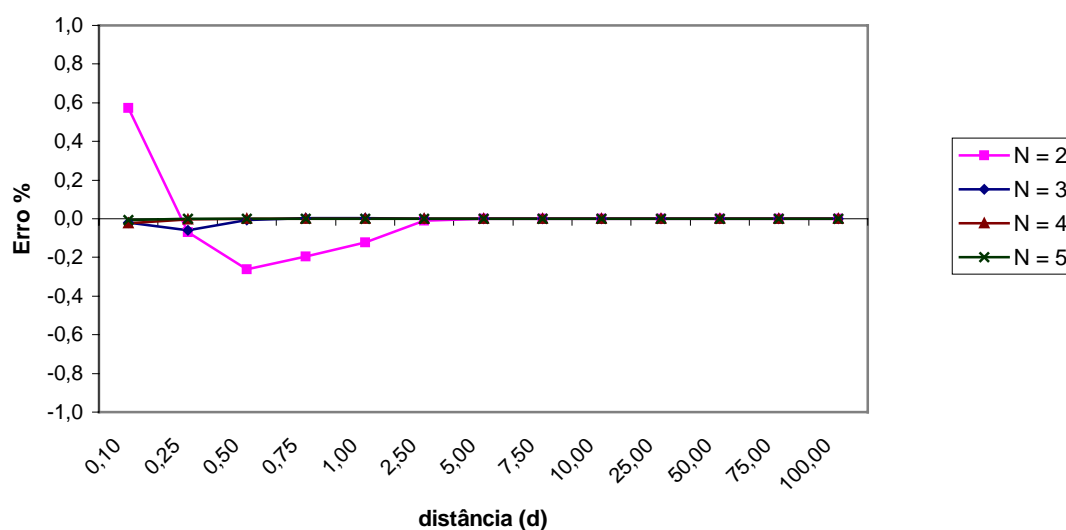
**Figura 6.5– Duas placas paralelas – Método da Dupla Discretização:
Análise do nível de discretização**

Observando o gráfico da Fig.6.5 podemos concluir que, ao contrário do método Hemi-Cube, este método apresenta bons resultados a medida que a distância vai aumentando. A aproximação de que cada superfície possui um formato de disco se torna melhor a medida que esta é vista de distâncias maiores. Isto é válido também para níveis de discretização muito baixos, como o nível 0. Por outro lado, quando as distâncias são pequenas em comparação ao tamanho das superfícies, o formato triangular difere muito de um disco e esta aproximação falha, fornecendo resultados pobres.

6.2.3.3 Integral de Contorno

Para avaliarmos o comportamento deste método variou-se o número de divisões nos contornos das superfícies, pois é ao longo deles que avaliamos a integral. O resultado deste teste é apresentado na Fig.6.6. Como neste caso não temos a presença de obstruções, as superfícies da malha radiativa não foram subdivididas (nível 0).

2 placas paralelas (1x1) - Integral de Contorno (nível 0)



**Figura 6.6– Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno:
Análise em função do número de divisão dos contornos**

Analisando a Fig.6.6 podemos concluir que para esta situação o método da Integral de Contorno fornece resultados excelentes. A medida que vamos aumentando o número de divisões nos contornos o erro tende a zero. Outro fator importante a ser salientado é que o nível de precisão deste método possui uma ordem de grandeza a mais do que os outros anteriormente apresentados. Isto é observado pelos valores dos erros apresentados no gráfico anterior, os quais encontram-se na faixa de $-1,0$ a $1,0$ %.

Pode-se também perceber que a medida que a distância vai aumentando necessitamos de uma divisão menor nos contornos para a obtenção da mesma precisão. De posse desta informação podemos desenvolver uma expressão que calcule automaticamente o número de divisões necessárias em função da distância envolvida entre as duas superfícies e de um nível de erro pré-estipulado. Isto é realizado através de diversas simulações onde, variando-se a distância, podemos verificar qual o número de divisões nos contornos fornece resultados com a mesma margem de erro. Realizando este procedimento, para esta configuração geométrica e para distâncias maiores do que 1,0; obtemos a seguinte expressão para um nível de erro de 10^{-4} %.

$$N = (\text{int}) \left[3.0175 + 8.632 \cdot e^{\frac{-d}{2.875 \cdot 10^{-4}}} + 4.108 \cdot e^{\frac{-d}{0.04789}} + 2.108 \cdot e^{\frac{-d}{2.053}} \right] \quad (6.2)$$

onde d é a distância entre as placas.

Os resultados obtidos utilizando esta aproximação podem ser vistos na Fig.6.7. Podemos observar que para distâncias maiores que 1,0 o erro está dentro da margem especificada.

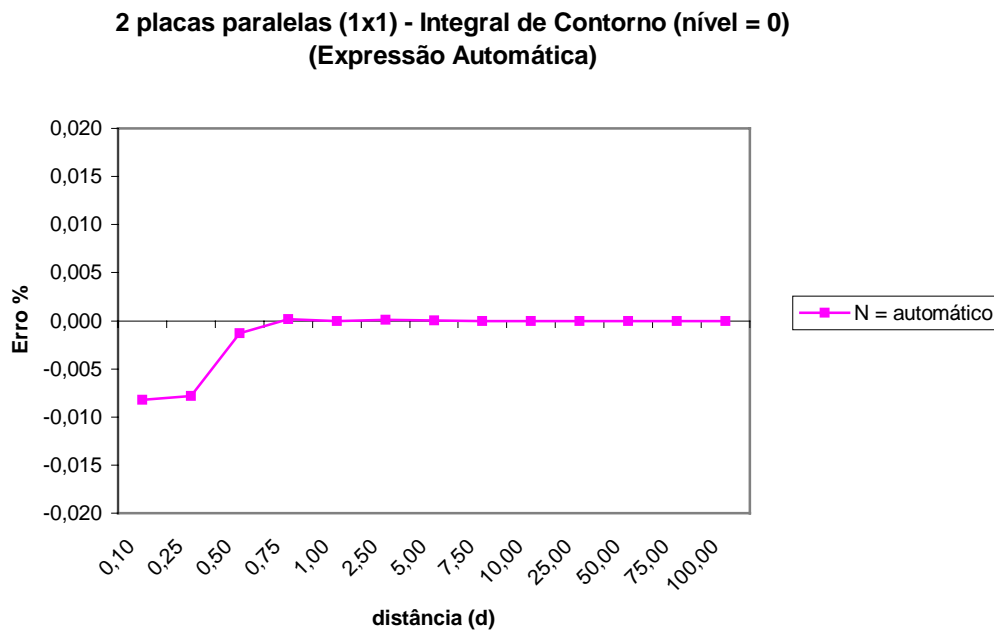


Figura 6.7– Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno:
Utilizando divisão automática dos contornos

O mesmo procedimento anteriormente apresentado para o método da Integral de Contorno pode ser facilmente estendido para o método Hemi-Cube e o método da Dupla Discretização. A única diferença é que nestes métodos ao invés de obtermos o número de divisões nos contornos podemos obter como resultado a resolução do Hemi-Cubo ou o nível de discretização das faces, no caso da Dupla Discretização, minimizando a entrada de dados pelo usuário e automatizando o processo.

6.2.3.4 Comparação entre os Métodos

Visando realizar uma análise comparativa entre os métodos para o caso de duas placas paralelas a uma distância fixa ($d = 1,0$), a seguir, é apresentado um gráfico onde podemos

analisar a convergência dos métodos a medida que vamos aumentando o seu *nível de refinamento*. Este nível de refinamento depende do método, no caso do Hemi-Cube ele significa a sua resolução, no caso da Dupla Discretização este índice significa o nível de discretização das superfícies e no caso da Integral de Contorno este nível representa o número de divisões nos contornos.

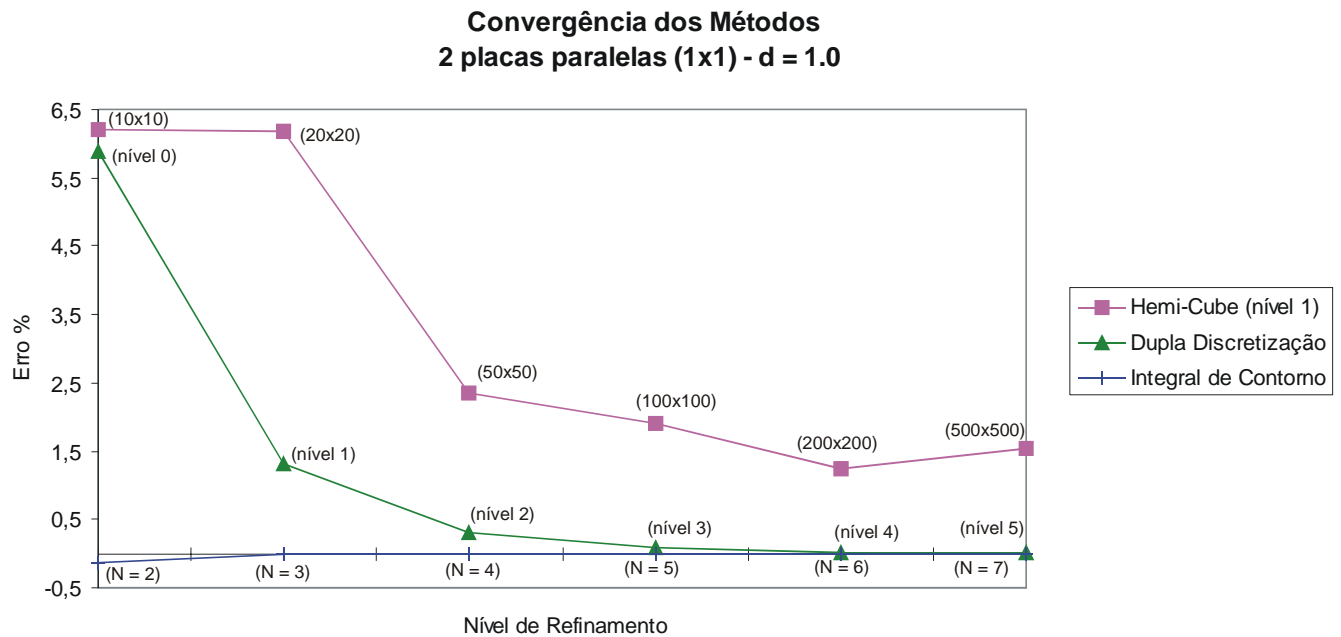


Figura 6.8– Duas placas paralelas – Convergência dos métodos

Analisando a Fig.6.8 podemos perceber que para esta situação o método da Integral de Contorno possui uma melhor convergência em comparação aos outros métodos. Percebe-se que 3 divisões nos contornos fornecem erros bem menores do que Hemi-Cubos com resolução de 500x500 ou a utilização de um nível 3 de discretização das superfícies para o método da Dupla Discretização. Podemos concluir também que a medida que vamos aumentando o nível da discretização nas superfícies, o método da Dupla Discretização converge para erros bastante pequenos. Por outro lado, se aumentarmos continuamente a resolução do Hemi-Cubo, para uma distância fixa o erro tende a se estabilizar em um valor. Isto se deve ao fato de que a partir de uma certa resolução os erros deixam de ser ocasionados pela hipótese de falseamento e passam a ser predominantemente oriundos da aproximação de F_{d1-2} por F_{1-2} . Se desejarmos que o erro se reduza, devemos aumentar o nível de discretização da superfície onde estamos posicionando o Hemi-Cubo. Este fato será mais evidenciado nos

exemplos a seguir.

6.2.4 Duas Placas Perpendiculares

O segundo teste realizado para avaliar o comportamento dos métodos para o cálculo do fator de forma é bem semelhante ao exemplo anterior. Nesta configuração são utilizadas duas placas perpendiculares com uma aresta coincidente, conforme ilustrado na Fig.6.9.

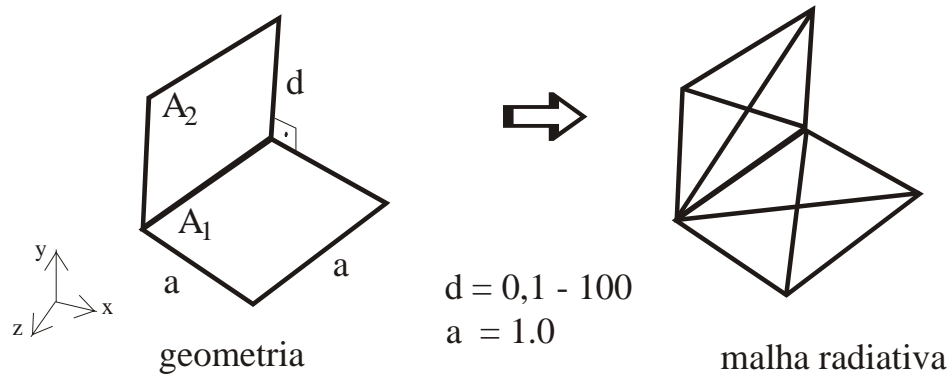


Figura 6.9– Duas placas perpendiculares

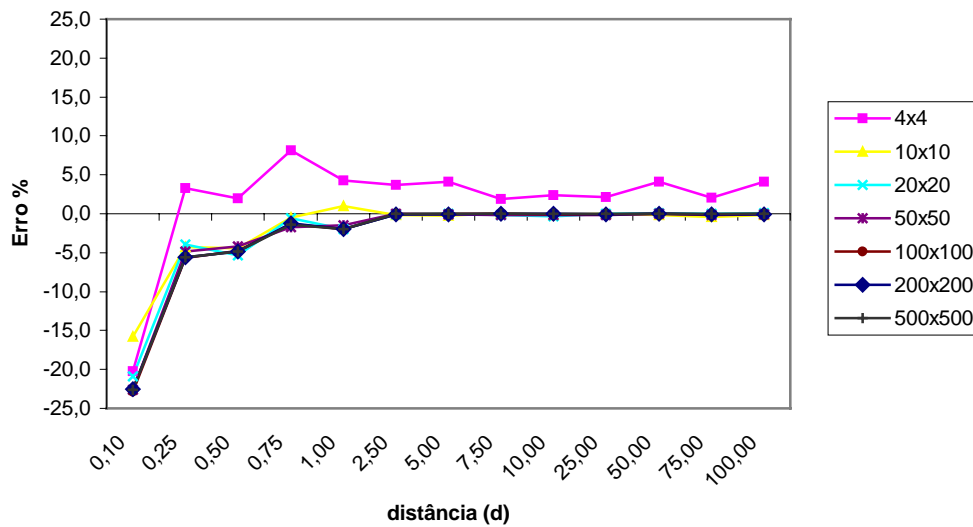
Nesta configuração variou-se o parâmetro d de 0,1 a 100. Os gráficos apresentados são obtidos comparando a solução numérica com a solução analítica apresentada anteriormente pela Fig.3.4 do terceiro capítulo. Os erros apresentados foram calculados utilizando a expressão da Eq.(6.1) e como neste caso não temos a presença de obstruções, as análises realizadas são semelhantes às da seção anterior.

6.2.4.1 Hemi-Cube

Para esta configuração geométrica, de maneira diferente do exemplo anterior, o método Hemi-Cube apresentou bons resultados, à medida que o parâmetro d é aumentado. Como antes, foi estudado o comportamento para várias resoluções do Hemi-Cubo e posteriormente variou-se também o nível de discretização da superfície onde o Hemi-Cubo é posicionado. Os resultados destas simulações são apresentados na Fig.6.10.

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,841 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:59 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 155 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

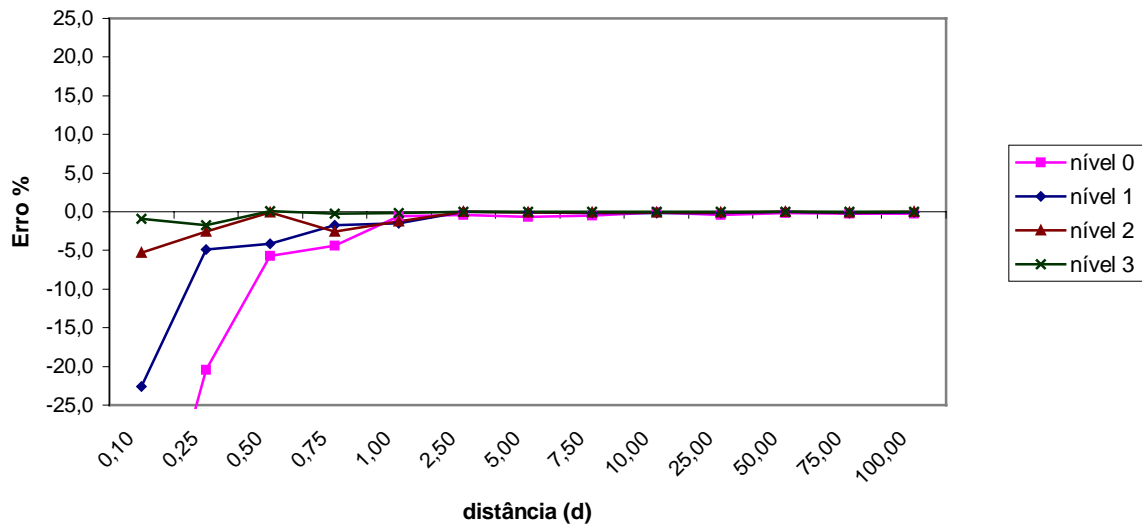
2 placas perpendiculares (1x1) - Hemi-Cube (nível 1)



**Figura 6.10– Duas placas perpendiculares– Método Hemi-Cube:
Análise da resolução do Hemi-Cubo**

Podemos concluir que para valores grandes do parâmetro d obtemos bons resultados para Hemi-Cubos com resolução maiores do que 10x10. Quando temos valores de d pequenos (entre 0,1 e 1,0) podemos perceber que o fato de aumentarmos a resolução do Hemi-Cubo não acarreta redução dos erros. Isto é explicado pela ajuda da Fig.6.11 e baseia-se em uma justificativa já apresentada. Com a ajuda das Fig.6.10 e Fig.6.11 percebemos que para valores pequenos de d os erros são reduzidos somente se aumentarmos o nível de discretização da superfície onde estamos posicionando o Hemi-Cubo. De maneira semelhante a anterior, conclui-se que, para uma certa distância, existe um momento onde elimina-se o erro de falseamento do Hemi-Cubo e este método fica limitado pela aproximação de F_{1-2} por F_{d1-2} . Assim somente reduziremos o erro se aumentarmos o nível de subdivisões da superfície em questão.

2 placas perpendiculares (1x1) - Hemi-Cube (50x50)



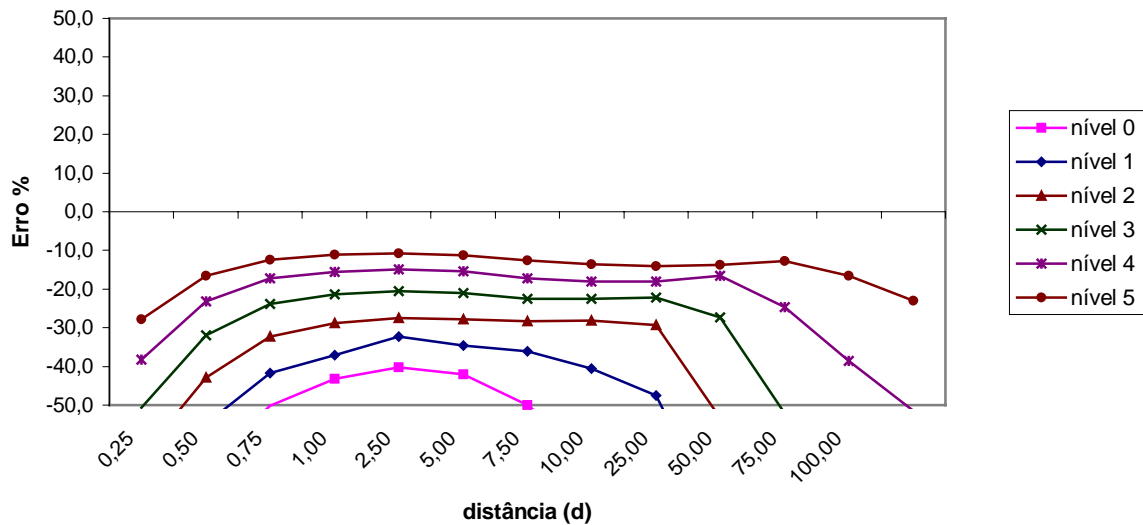
**Figura 6.11– Duas placas perpendiculares– Método Hemi-Cube:
Análise do nível de discretização da superfície**

6.2.4.2 Dupla Discretização

Os resultados obtidos com o método da Dupla Discretização são apresentados na Fig.6.12. Neste caso, de maneira análoga a anterior, variou-se o nível de subdivisões nas superfícies e observou-se o comportamento do método, enquanto o parâmetro d aumenta.

Analisando este gráfico observa-se que o método apresenta um alto nível de erro, sendo necessário elevados níveis de discretização para atingirmos erros da ordem de 10% para distâncias próximas a 1,0. Este fato torna-se mais grave a medida que o parâmetro d aumenta. Isto é explicado pela aproximação utilizada neste método, pois de acordo com a Fig.6.9 temos que as superfícies oriundas do processo de discretização possuem o formato triangular e à medida que o parâmetro d aumenta, a sua forma se alonga cada vez mais, diferindo em muito do formato de um disco. Para que esta aproximação seja válida é necessário um altíssimo nível de discretização, fazendo com que os triângulos resultantes fiquem cada vez menores comparados com a distância entre as superfícies.

2 placas perpendiculares (1x1) - Dupla Discretização



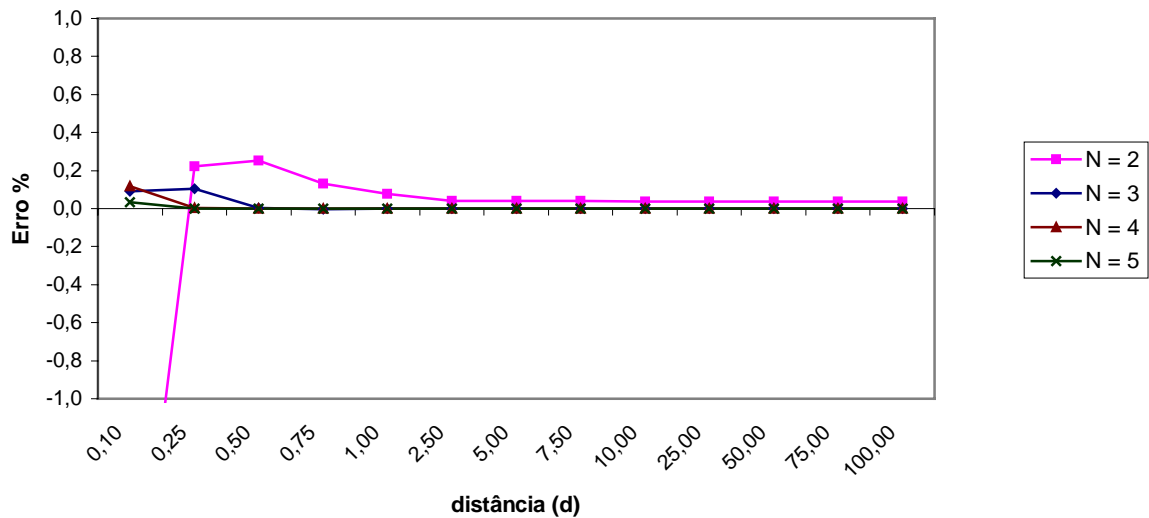
**Figura 6.12– Duas placas paralelas – Método da Dupla Discretização:
Análise do nível de discretização**

Vale a pena ressaltar que as sub-superfícies oriundas das discretizações das superfícies da malha radiativa em níveis não altera o formato original da malha, pois o processo de subdivisão utilizado gera sempre 4 triângulos menores com o mesmo aspecto que o triângulo original. Assim, quando a distância d é grande e a discretização pobre, estaremos trabalhando com triângulos bastante distorcidos. Este comportamento indesejado pode ser reduzido se utilizarmos uma discretização um pouco mais uniforme das superfícies.

6.2.4.3 Integral de Contorno

A medida que vamos aumentando o número de divisões ao longo dos contornos das superfícies, para esta configuração geométrica, o método da Integral de Contorno também apresenta excelentes resultados, como ilustrado na Fig.6.13. Isto é, em grande parte, devido ao fato de estarmos avaliando analiticamente a integral contida na expressão de Mitalas-Stephenson ao longo dos contornos adjacentes, conforme procedimento descrito no Capítulo 3.

2 placas perpendiculares (1x1) - Integral de Contorno (nível 0)



**Figura 6.13– Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno:
Análise em função do número de divisão dos contornos**

De maneira análoga a configuração anterior, podemos perceber que o este método é uma ordem de grandeza mais preciso do que os outros, mesmo para distâncias pequenas onde a aproximação numérica da integral não é tão boa.

Podemos também estudar o comportamento da Eq.(6.2), desenvolvida para duas placas paralelas para esta situação, onde as placas são perpendiculares. Analisando o resultado mostrado na Fig.6.14, podemos concluir que a sua utilização fornece resultados com níveis de erro maiores do que $10^{-4}\%$. Podemos estender este resultado se também possuíssemos uma relação semelhante para o método Hemi-Cube e para o método da Dupla Discretização. Portanto, conclui-se ser muito difícil a obtenção de uma expressão que se adeque a todas as configurações e garanta um determinado nível de precisão do cálculo do fator de forma para a maioria das configurações geométricas.

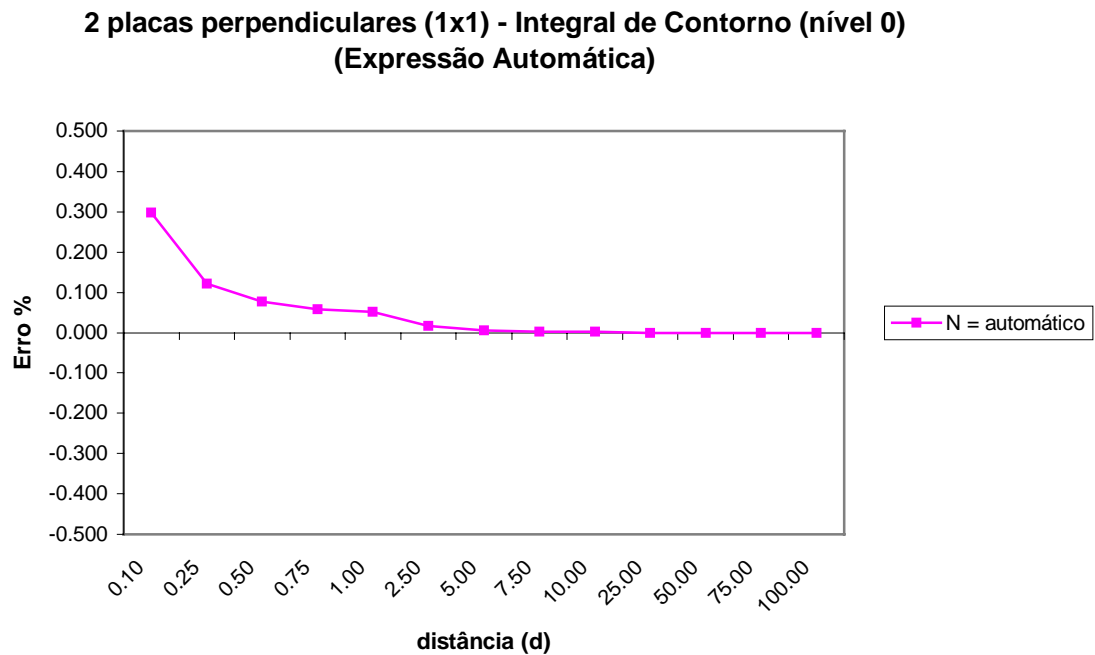


Figura 6.14— Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno:
Utilizando divisão automática dos contornos

6.2.4.4 Comparação entre os Métodos

Como feito na seção anterior podemos comparar a convergência destes métodos para a configuração de duas placas perpendiculares com o parâmetro d fixo. Analisando a Fig.6.15 podemos perceber que o mesmo comportamento observado no caso anterior é aqui verificado. A única diferença é que neste caso o método Hemi-Cube possui uma taxa da convergência melhor do que o da Dupla Discretização, fornecendo, em geral, erros menores.

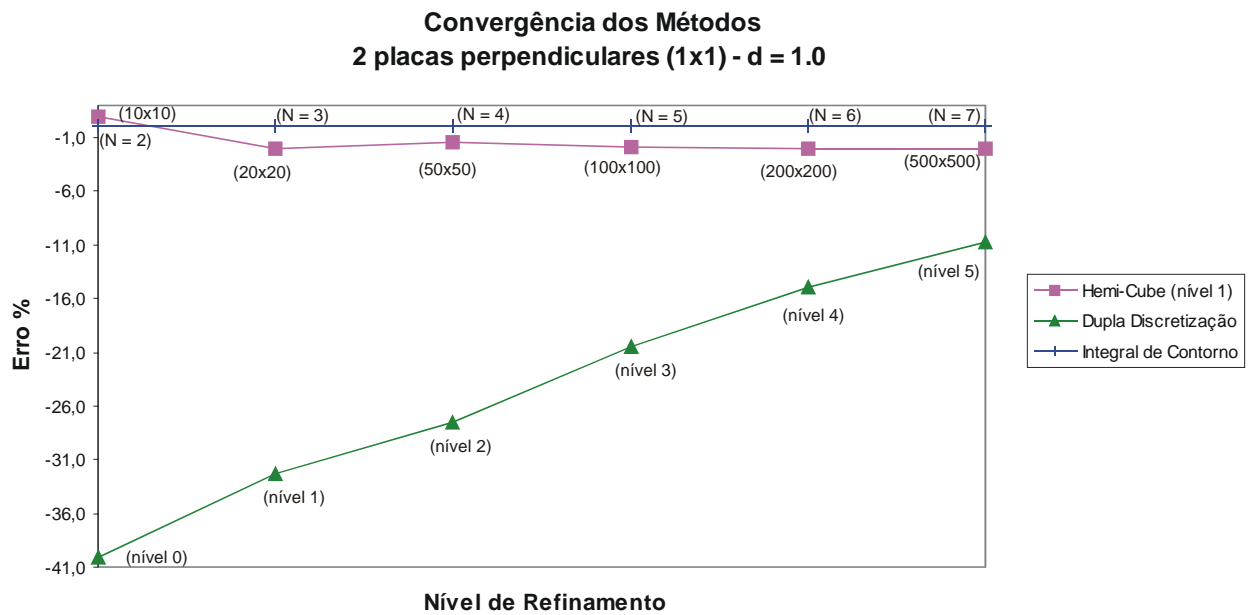


Figura 6.15– Duas placas perpendiculares – Convergência dos métodos

6.2.5 Duas Placas Paralelas com Obstrução

O terceiro teste realizado envolvendo o cálculo do fator de forma foi apresentado no trabalho de Walton (1987). Esta configuração geométrica, apresentada na Fig.6.16, consiste em duas placas paralelas (A_1 e A_2) de dimensões 1x1 separadas por uma distância de 1,0 e possuindo o seu campo de visão obstruído por uma superfície menor de dimensões 0,5x0,5 posicionada a 0,25 de A_1 .

O objetivo deste teste é avaliar os métodos no cálculo do fator de forma entre A_1 e A_2 e avaliar o seu comportamento na presença de superfícies obstrutoras. De acordo com Walton (1987) o valor correto de F_{1-2} vale 0,115621.

Vale a pena lembrarmos que os métodos da Integral de Contorno e da Dupla Discretização, que foram implementados ao longo deste estudo, quando na presença de obstruções, utilizam os algoritmos de checagem e eliminação de superfícies apresentados no Capítulo 3.

Os erros apresentados nos gráficos desta seção foram também calculados utilizando a Eq.(6.1).

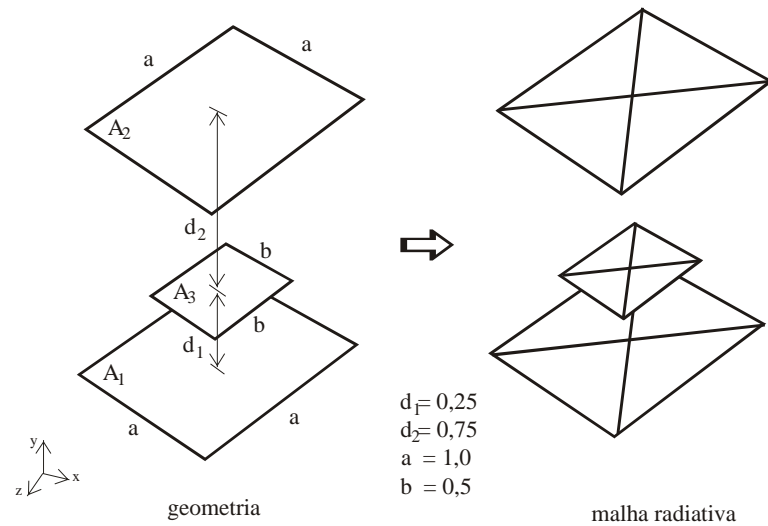


Figura 6.16– Duas placas paralelas com obstrução

6.2.5.1 Hemi-Cube

Para avaliarmos o desempenho do método Hemi-Cube para esta configuração geométrica foi variado a sua resolução e o nível de discretização da superfície onde estamos posicionando o Hemi-Cubo. Os resultados estão apresentados na Fig.6.17.

2 placas paralelas (1x1) com obstrução - Hemi-Cube

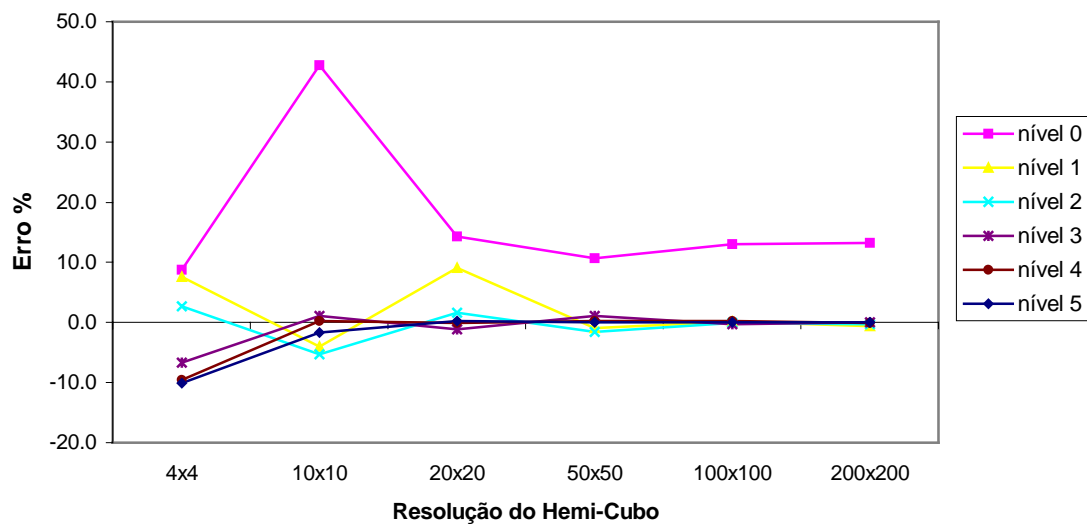


Figura 6.17– Duas placas paralelas com obstrução – Método Hemi-Cube

Analisando o gráfico anterior podemos perceber que o método Hemi-Cube apresenta bons resultados à medida que vamos aumentando a sua resolução e o nível de discretização das superfícies. Da mesma maneira que as situações anteriores, necessitamos do aumento dos dois parâmetros para obtermos uma boa precisão. Uma característica interessante deste método é o fato de que ele possui a mesma implementação quando temos a presença ou não de superfícies obstrutoras. A sua concepção mais genérica fornece uma boa relação precisão-custo computacional na presença de um número considerável de superfícies obstrutoras. Esta fato será melhor explicado ao longo deste capítulo.

6.2.5.2 Dupla Discretização

De acordo com a Fig.6.18 podemos perceber que quando aumenta-se o nível de discretização das superfícies, para esta situação, este método converge para erros cada vez menores. Um fator importante a ser mencionado é que necessitamos de um nível 7 de discretização das superfícies, ou seja utilizando aproximadamente 4^7 sub-elementos para cada superfície triangular da malha radiativa para obter uma precisão equivalente ao nível 1 com um Hemi-Cubo de resolução 100x100.

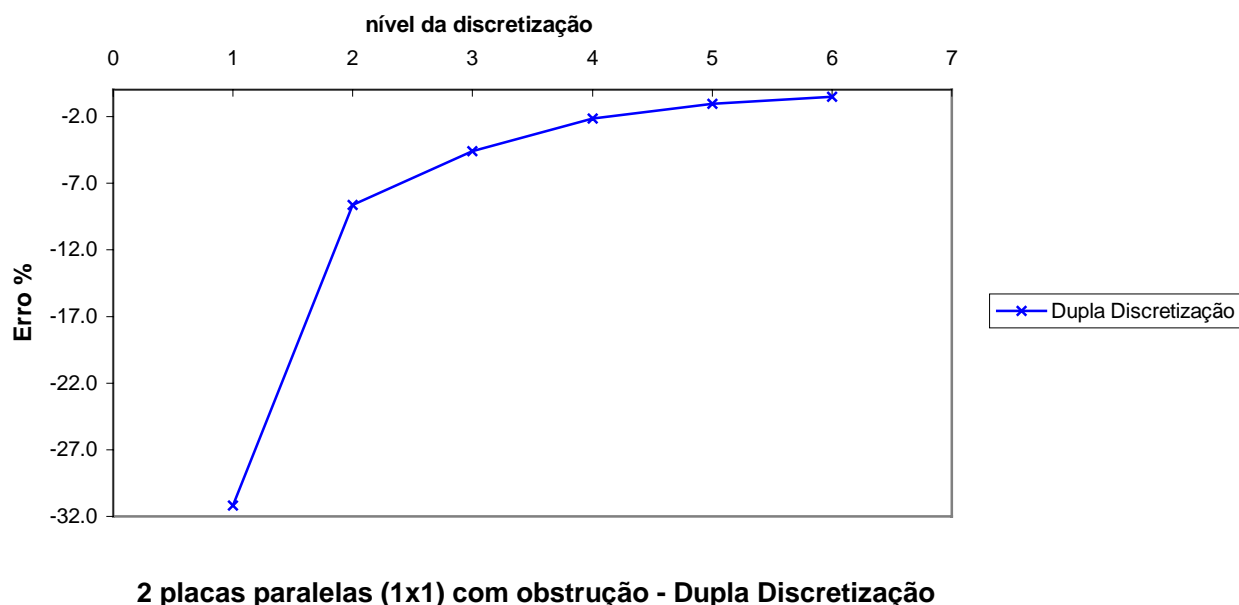


Figura 6.18– Duas placas paralelas com obstrução – Método da Dupla Discretização

6.2.5.3 Integral de Contorno

Agora, além de variarmos o número de divisões nos contornos, alterou-se também o nível de discretização da superfície que será projetada para a determinação de seus contornos visíveis, neste caso a superfície A_2 . Os resultados estão apresentados na Fig.6.19.

2 placas paralelas (1x1) com obstrução - Integral de Contorno

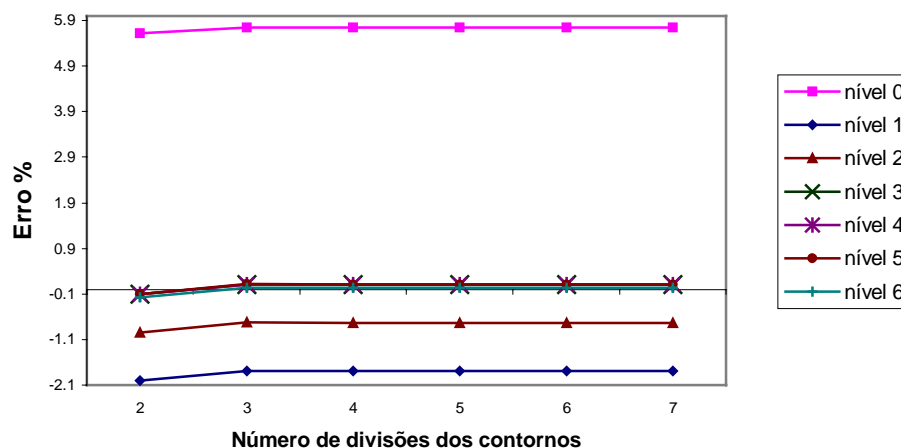


Figura 6.19– Duas placas paralelas com obstrução – Método da Integral de Contorno

Analisando o gráfico anterior podemos perceber que a precisão deste método está, agora, mais sensível ao nível de discretização da superfície do que com o aumento do número de divisão dos contornos. Observa-se que da mesma maneira que quando não possuímos obstruções, uma vez que utilizamos um nível de discretização suficiente para a determinação precisa dos contornos da região a ser projetada, este método fornece bons resultados, embora esta limitação com a dependência da discretização de uma das superfícies seja um fator limitante em aspectos de performance.

6.2.5.4 Comparação dos Métodos

Para uma análise comparativa da precisão envolvida, a seguir é apresentado um gráfico onde os três métodos em análise são comparados em função do seu nível de refinamento. Com o objetivo de apresentá-los na mesma escala, é ilustrada a curva de resolução para o método Hemi-Cube e o método da Integral de Contorno utilizando um nível 1 para a discretização das superfícies.

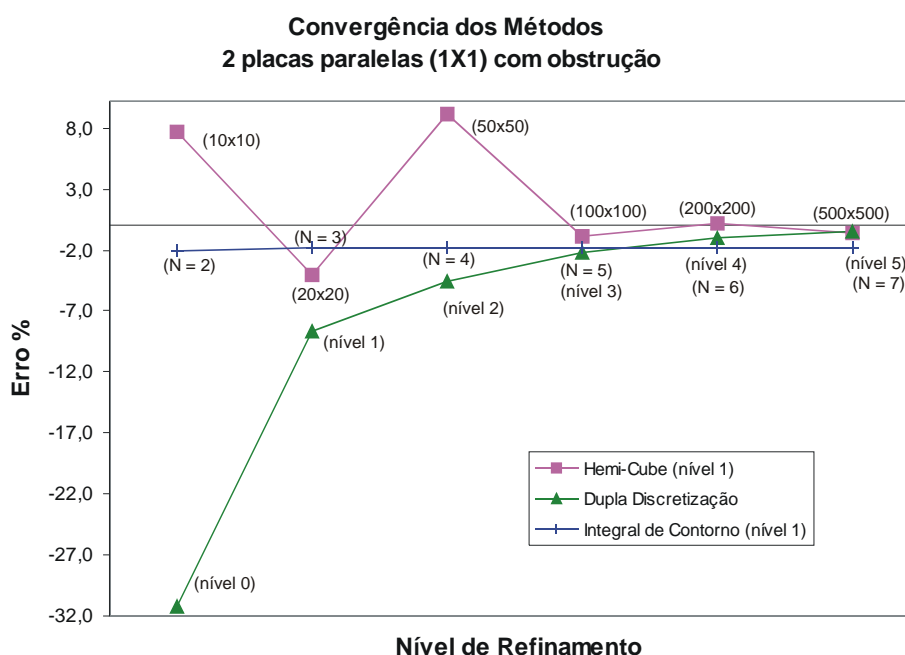


Figura 6.20– Duas placas paralelas com obstrução – Comparação dos Métodos

Observando as curvas da Fig.6.20 podemos concluir que com a presença de obstruções, a precisão do método da Integral de Contorno não é mais uma ordem de grandeza menor do que as dos outros métodos. Este método possui agora sua acurácia limitada e definida pelo nível de discretização da superfície que será projetada. Este fato faz com que o método Hemi-Cube, utilizando uma resolução de somente 100x100 apresente uma precisão melhor, utilizando o mesmo nível de refinamento nas superfícies, quando comparado com o método da Integral de Contorno.

Acredita-se que quando o número de superfícies obstrutoras aumentar, para mantermos a mesma precisão, necessitamos aumentar na mesma proporção o nível de discretização da superfície utilizado pelo Método da Integral de Contorno. Para o Hemi-Cube isto não é necessário, pois podemos variar a resolução do Hemi-Cubo, obtendo resultados equivalentes. Esta conclusão é feita baseada nos gráficos anteriores onde pode-se observar que no caso do Hemi-Cube, o aumento da resolução possui uma influência maior na precisão do que o aumento do número de divisões nos contornos para o método da Integral de Contorno.

6.2.6 Paralelepípedo com Obstrução

O último teste realizado para avaliação da precisão dos métodos de cálculo de fator de

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,841 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:59 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 156 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

forma também foi retirado do trabalho de Walton (1987). Esta geometria consiste em uma caixa unitária (1x1x1) onde suas laterais foram divididas em 14 superfícies de acordo com a Fig.6.21. Esta caixa possui uma superfície obstrutora (com dois lados) em seu interior posicionada no meio de suas faces e com o tamanho equivalente a metade de seu lado, finalizando um total de 16 superfícies retangulares. A Fig.6.21 também apresenta a malha radiativa oriunda do processo de discretização. Observe que em virtude deste processo, se estivermos utilizando o nível 0 de discretização equivale a estarmos trabalhando com 64 superfícies triangulares.

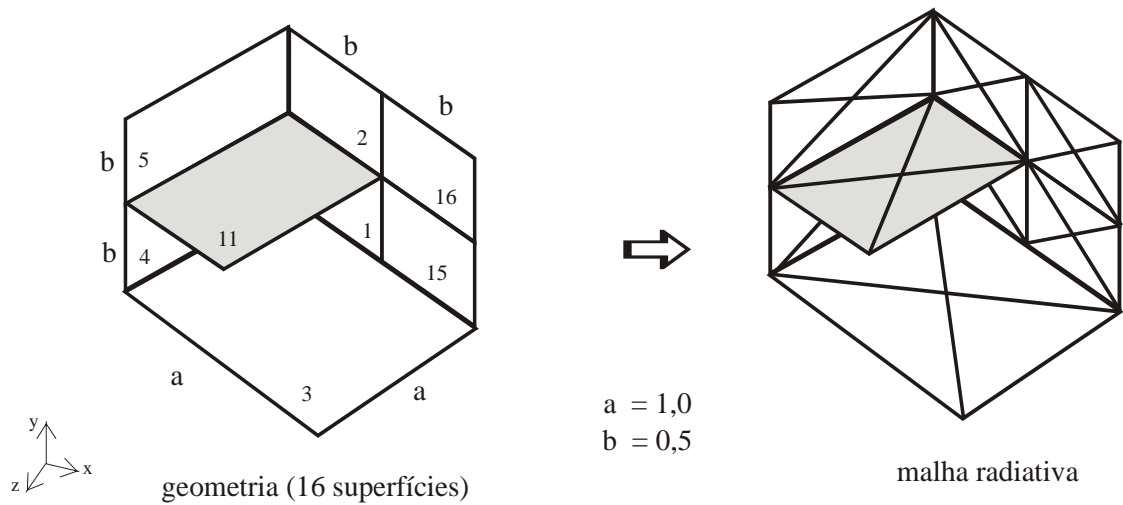


Figura 6.21– Paralelepípedo com obstrução

Em virtude de que na presença de obstruções ser difícil a determinação analítica do fator de forma entre duas superfícies e devido ao fato de possuírmos uma cavidade fechada, a comparação da precisão dos métodos para esta configuração será feita através da soma do fator de forma de cada superfície para as demais, que deve ser igual a 1. Assim o erro percentual será calculado de acordo com a seguinte expressão

$$Erro \% = \max \left(1 - \sum_{j=1}^N F_{i-j} \right) \times 100 \quad (6.3)$$

A expressão acima fornece como erro percentual a maior diferença encontrada em cada linha da matriz do fator de forma. Os resultados deste teste são descritos na tabela a seguir.

Hemi-Cube (nível 0)		Integral de Contorno (N=4)		Dupla Discretização	
Refinamento	Erro	Refinamento	Erro	Refinamento	Erro
10x10	-0,5460%	nível 0	1,0127%	nível 0	20,7674%
50x50	-0,0220%	nível 1	0,3706%	nível 1	1,6599%
100x100	-0,0050%	nível 2	0,0537%	nível 2	0,6581%
200x200	-0,0010%	nível 3	0,0356%	nível 3	0,2537%

Tabela 6.1- Resultados para o teste do paralelepípedo com obstrução

Analizando os valores apresentados na tabela acima, podemos perceber que o método Hemi-Cube apresenta os melhores resultados. Isto é uma consequência lógica da característica do método, onde em uma cavidade espera-se que todos os *pixels* das faces se encontrarão naturalmente encobertos. Os erros aqui existentes podem ser oriundos de duas fontes. A primeira fonte de erro pode acontecer quando durante as operações de projeções alguma linha ou ponto é projetada exatamente em cima de um *pixel* e, em virtude das imprecisões destes cálculos, este *pixel* pode acabar sendo processado como não coberto. A segunda fonte de erros diz respeito a aproximação do fator de forma do centro do Hemi-Cubo em relação a suas faces. Esta aproximação considera que o Hemi-Cubo tenha uma resolução suficiente para aproximarmos o valor deste fator de forma pelo valor do fator de forma entre dois elementos de áreas infinitesimais. Dependendo do tamanho da variável utilizada para o armazenamento deste valor na memória do computador, esta soma somente resulta exatamente em uma unidade para resoluções de 200x200 ou mais.

Podemos também observar que o método da Integral de Contorno apresenta um nível de precisão intermediário, mas que precisamos utilizar um nível 3 de discretização das superfícies para obtermos uma precisão equivalente ao Hemi-Cubo de resolução 50x50 possuindo um nível 0.

Quando voltamos a nossa atenção para o método da Dupla Discretização verificamos que é necessário um nível de discretização bastante elevado para obtermos um nível de erro comparável com os outros métodos.

Devemos sempre lembrar que os erros aqui apresentados, dependendo do nível de fidelidade do modelo térmico em consideração, poderão influenciar os resultados dos campos de temperatura simulados. No caso deste exemplo, se considerássemos o método da Dupla Discretização utilizando um nível 1, estaríamos modelando um sistema que possui um desbalanço de energia radiativa de 1,6 % aproximadamente.

6.3 Análise da Performance dos Métodos de Cálculo do Fator de Forma

Após a análise da precisão dos métodos para o cálculo do fator de forma realizou-se uma análise para determinar a sua performance computacional. Para isso realizou-se uma seqüência de testes baseados em duas geometrias anteriormente apresentadas, a de duas placas paralelas com obstrução e a geometria do paralelepípedo com obstrução. Foram levadas em conta somente as geometrias com obstruções pois o objetivo era verificar o comportamento dos métodos em situações realísticas. Estes testes basearam-se em um refinamento sucessivo das malhas radiativas obtendo um número cada vez maior de superfícies e a partir daí realizava-se o cálculo do fator de forma entre elas medindo-se o tempo de computação.

6.3.1 Geometrias sem Obstrução

Antes da apresentação dos resultados, e também em virtude dos testes realizados envolverem somente geometrias com obstruções, vale a pena realizar alguns breves comentários sobre a performance dos métodos frente a geometrias sem obstrução, como as apresentadas nos testes de placas paralelas e das placas perpendiculares.

Nos casos sem obstrução observou-se que o método da Integral de Contorno apresenta o melhor desempenho computacional aliado a melhor precisão de resultados. Isto deve-se ao fato de que na ausência de obstruções o método da Integral de Contorno com a expressão de Mitalas-Stephenson somente realiza avaliação numérica de uma integral ao longo dos contornos, sendo portanto rápido e preciso. Além disto quando temos a presença de contornos adjacentes a integral é avaliada analiticamente.

Walton (1987) relata em seu trabalho que nestes casos sem obstrução, o tempo de processamento do método da Integral de Contorno utilizando a expressão de Mitalas-Stephenson é da ordem de N (número de divisões ao longo dos contornos) e se realizarmos a sua comparação com o método da Dupla Discretização, o tempo deste último é da ordem de N^4 , se cada superfície for dividida em N^2 elementos (onde N também é o número de divisões ao longo dos contornos).

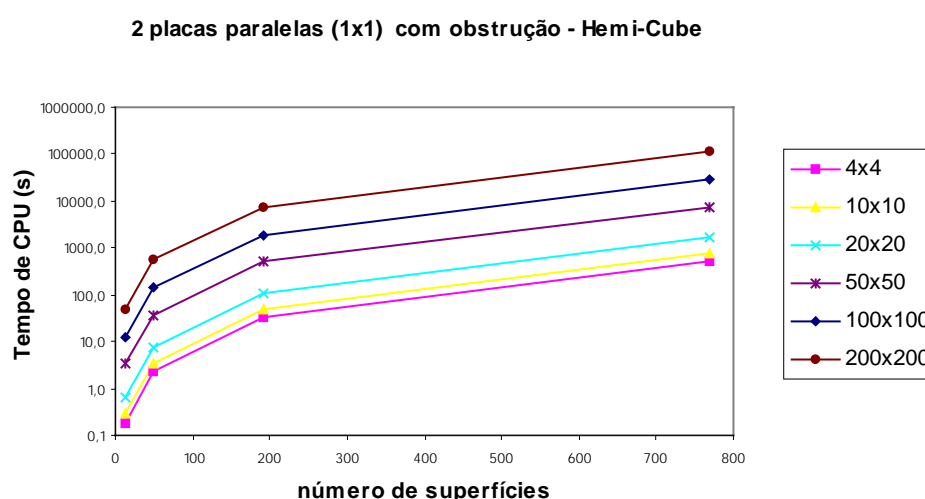
Podemos analisar também que o método Hemi-Cube não apresenta vantagens significativas quando comparado com o método da Integral de Contorno. Isto é devido ao fato de que este método utiliza o mesmo algoritmo para ambos os casos, ou seja, realiza as

mesmas operações na presença e na ausência de superfícies obstrutoras, sendo mais competitivo nas situações com obstruções.

6.3.2 Duas Placas Paralelas com Obstrução

Os resultados dos testes realizados para a configuração de duas placas paralelas com obstrução são apresentados a seguir. Neste teste variou-se o número de superfícies de 12 até 768. Estes casos foram simulados em um micro-computador Pentium III 700 MHz com 512 Mb de memória RAM e os códigos foram compilados sem opções de otimização. Acredita-se que melhorias nos tempos de processamento podem ser obtidas com algumas alterações nos algoritmos, mas a característica do perfil das curvas apresentadas irá permanecer constante pois é predominantemente função do número de superfícies envolvidas.

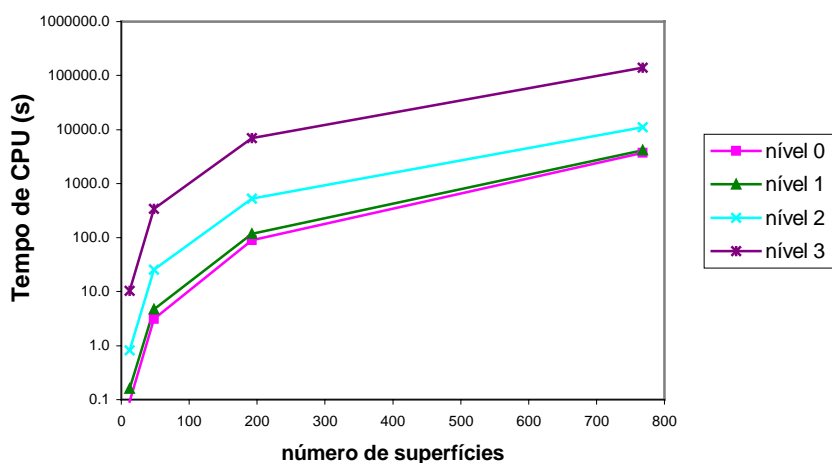
O gráfico apresentado na Fig.6.22 mostra o desempenho do método Hemi-Cube. Neste caso, como o refinamento da malha radiativa equivale a um aumento do nível de discretização da superfície onde estamos posicionando o Hemi-Cube, foi utilizado um nível 0 de discretização, variando-se somente o número de superfícies da malha radiativa e analisando a performance do método. Este gráfico ilustra os tempos de processamento obtidos para diversas resoluções do Hemi-Cubo à medida que vamos aumentando o número de superfícies da geometria. Observando este gráfico podemos concluir que as curvas para cada resolução são praticamente paralelas, ilustrando uma variação linear do tempo de processamento com a resolução do Hemi-Cubo.



**Figura 6.22– Placas Paralelas com obstrução:
Performance do método Hemi-Cube**

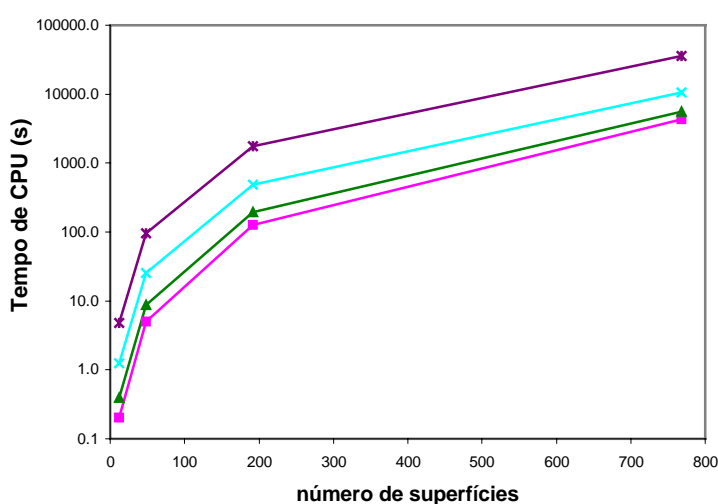
As Fig.6.23 e Fig.6.24, a seguir, ilustram os resultados obtidos com os métodos da Dupla Discretização e Integral de Contorno. Tanto no método da Dupla Discretização quanto no método da Integral de Contorno foram variados os níveis de discretizações das superfícies. No método da Integral de Contorno utilizou-se 3 divisões ao longo dos contornos.

2 placas paralelas (1x1) com obstrução - Dupla Discretização



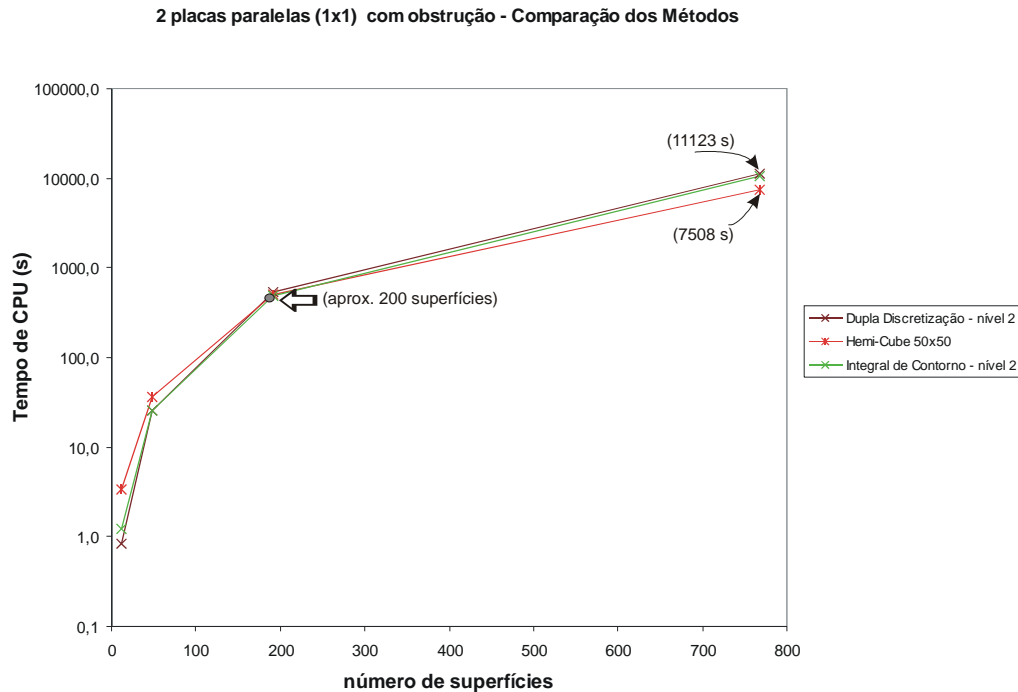
**Figura 6.23– Placas paralelas com obstrução:
Performance do método da Dupla discretização**

2 placas paralelas (1x1) com obstrução - Integral de Contorno



**Figura 6.24– Placas paralelas com obstrução:
Performance do método da integral de Contorno**

Com o objetivo de realizar uma análise comparativa da performance dos métodos, a seguir é apresentado um gráfico aonde algumas curvas dos gráficos anteriores foram sobrepostas.



**Figura 6.25– Placas paralelas com obstrução:
Comparação da performance dos métodos**

Analisando a Fig.6.25 podemos verificar que para um número pequeno de superfícies o método da Integral de Contorno e da Dupla Discretização são mais rápidos do que o Hemi-Cube. À medida que o número de superfícies vai aumentando podemos concluir que existe um determinado valor onde o tempo de processamento do Hemi-Cubo será sempre menor do que os outros métodos. Realizando uma verificação visual da intersecção das curvas acima podemos concluir que para esta configuração geométrica, utilizando um Hemi-Cubo de resolução 50x50, a partir 200 superfícies aproximadamente este método será menos custoso computacionalmente quando comparado com o método da Dupla Discretização e Integral de Contorno utilizando um nível 2 de discretização. Esta comparação poderia ser feita utilizando Hemi-Cubos com outras resoluções e outros níveis de refinamento para os métodos da Dupla Discretização e Integral de Contorno, pois analisando as curvas da Fig. 6.23 e 6.24 verificamos que as mesmas possuem uma inclinação maior do que as curvas apresentadas no método do Hemi-Cube (Fig. 6.22). Assim, sempre existirá uma situação onde uma

determinada resolução de Hemi-Cubo possuirá um tempo de processamento menor do que qualquer nível de discretização utilizado pelo método da Integral de Contorno e Dupla Discretização. Este fato é melhor compreendido quando prestamos atenção na ordem de grandeza do tempo de processamento dos métodos, comentada a seguir.

O método Hemi-Cube apresenta a característica de possuir um aumento gradativo da sua performance computacional quando comparado com os outros métodos. Considerando uma geometria com N superfícies, como já dito anteriormente, este método realizará os mesmos procedimentos na ausência ou presença de superfícies obstrutoras. Para cada superfície onde posiciona-se o Hemi-Cubo, calcula-se uma linha da matriz de fator de forma (N cálculos) de uma vez só, utilizando os mesmos procedimentos de projeção e verificação da distância da superfície projetada até ao *pixel*. Este algoritmo faz com que o método Hemi-Cube calcule N^2 fatores de forma sem nenhum esforço adicional para a verificação de obstruções. Como utilizamos a Lei da Reciprocidade para diminuir o número de cálculos a serem realizados, o método do Hemi-Cube calcula somente $N(N-1)/2$ fatores de forma. O único fator que influencia o tempo de processamento é a resolução do Hemi-Cubo.

Por outro lado os métodos da Dupla Discretização e Integral de Contorno além de processaram $N(N-1)/2$ fatores de forma, necessitam realizar verificações para saber quais elementos estão obstruindo o campo de visão do par de superfícies em consideração. Assim, para cada par de superfícies precisamos realizar $N(N-1)(N-2)/2$ checagens por superfícies obstrutoras, fornecendo um processo da ordem de N^3 . Além disso, depois de verificada a existência da obstrução, o método da Integral de Contorno necessita que discretizemos uma das superfícies do par em consideração em n sub-elementos, e para cada um destes devemos projetá-lo para a determinação dos seus contornos visíveis, o que faz o tempo de processamento deste método seja bastante influenciado pelo valor deste nível de subdivisão.

O método da Dupla Discretização além de necessitar das mesmas checagens para a verificação de superfícies obstrutoras que o método da Integral de Contorno, necessita da subdivisão de ambas as superfícies em consideração. Assim, podemos perceber que na sua concepção este método é função de n^2 , onde n , como no caso da Integral de Contorno também é o número de sub-elementos oriundo dos níveis discretização. Este fato ajuda entender porque a partir de um certo número de superfícies o método da Dupla Discretização aqui implementado é mais lento do que o método da Integral de Contorno para o mesmo nível de discretização.

De posse destas informações e analisando o gráfico da Fig.6.25 podemos verificar que para um número pequeno de superfícies os procedimentos genéricos realizados pelo método do Hemi-Cube são mais morosos que os procedimentos para verificação de obstruções e discretizações apresentados pela Dupla Discretização e Integral de Contorno, mas a medida que o número de superfícies vai aumentando, esta situação se inverte.

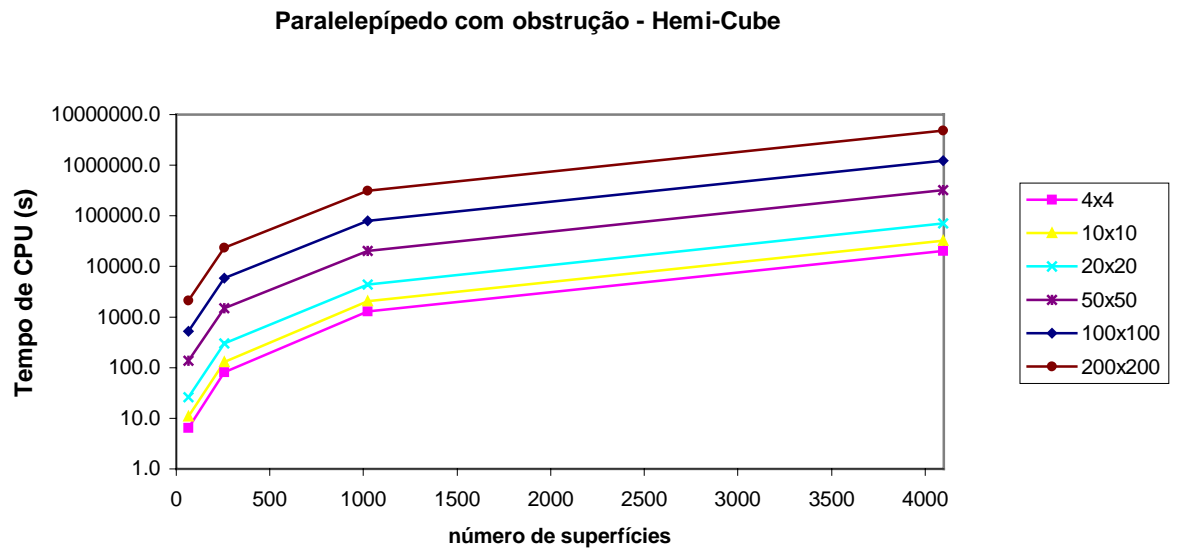
Os fatos aqui apresentados serão também evidenciados no exemplo a seguir, onde foi testado uma geometria um pouco mais complexa envolvendo, um número maior de superfícies.

6.3.3 Paralelepípedo com Obstrução

O último teste realizado com os algoritmos de cálculo do fator de forma consiste na geometria da Fig.6.21. Neste teste foi também utilizado um microcomputador modelo Pentium III 700 MHz com 512 Mb de memória RAM. O objetivo aqui é o mesmo que o anterior, a análise do tempo de processamento dos métodos frente a uma configuração mais complexa. Como a geometria em questão possuía um número maior de superfícies originais, o teste iniciou-se com 64 elementos da malha radiativa e o objetivo era ir aumentando o nível de refinamento para 256, 1024 e 4096 superfícies. Em virtude do tempo de processamento ser extremamente longo, não foi possível realizar as análises para o número maior de superfícies, sendo os resultados obtidos apresentados na Fig.6.26, 6.28 e 6.29.

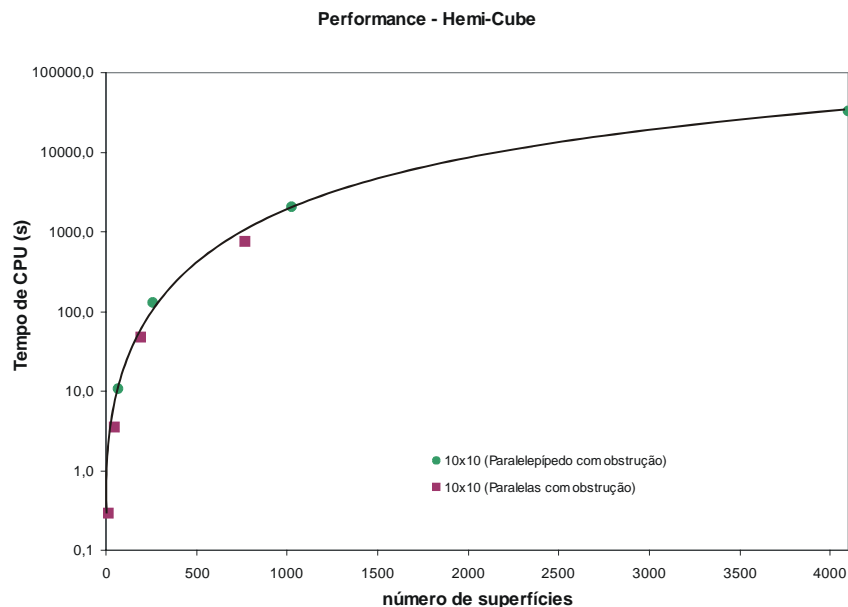
Apesar da Fig. 6.26 ilustrar os resultados para todas as faixas de superfícies variando-se a resolução do Hemi-Cubo de 4x4 até 200x200, foram simulados somente as resoluções de até 100x100. A curva de 200x200 foi construída por analogia, a partir da observação de que a relação do aumento do tempo de processamento da resolução de 100x100 para 200x200 neste caso devia ser a similar a que foi obtida no caso anterior, entre as duas placas paralelas com obstrução. Isto foi constatado em virtude desta relação ser verdade para as resoluções de 10x10 para 20x20, de 20x20 para 50x50 e de 50x50 para 100x100. Assim sabendo a relação do caso anterior de quantas vezes o tempo de CPU aumentava quando variava de 100x100 para 200x200, obtemos a curva para o presente caso.

É importante salientar que as conclusões acima apresentadas tiram proveito da observação do comportamento aproximadamente linear do método do Hemi-Cube em função do número de superfícies envolvidas, pois os esforços computacionais na presença de uma ou mais superfícies obstrutoras tende a ser o mesmo.



**Figura 6.26– Paralelepípedo com obstrução:
Performance do método Hemi-Cube**

De posse destas conclusões podemos unir os pontos obtidos do teste das duas placas paralelas com obstrução com os pontos obtidos neste caso e construirmos uma curva que forneça o comportamento do tempo de processamento do método Hemi-Cube para uma faixa maior do número de superfícies. Esta curva está ilustrada na Fig.6.27.



**Figura 6.27– Paralelepípedo com obstrução:
Análise do método Hemi-Cube**

O resultado obtido nos testes para esta configuração para o método da Dupla Discretização e Integral de Contorno são apresentados a seguir.

Paralelepípedo com obstrução - Dupla Discretização

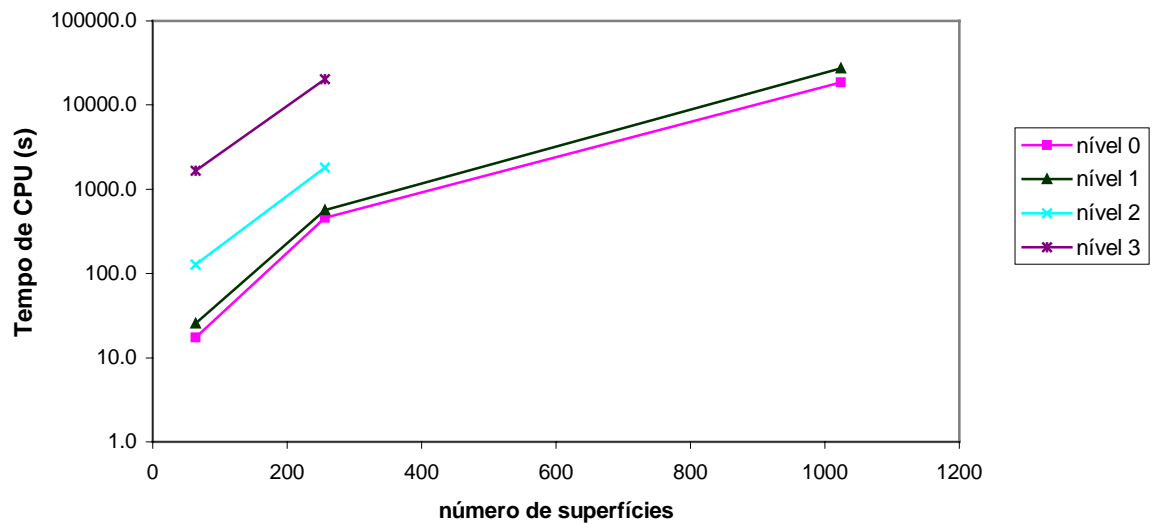


Figura 6.28– Paralelepípedo com obstrução:
Performance do método da Dupla Discretização

Paralelepípedo com obstrução - Integral de Contorno

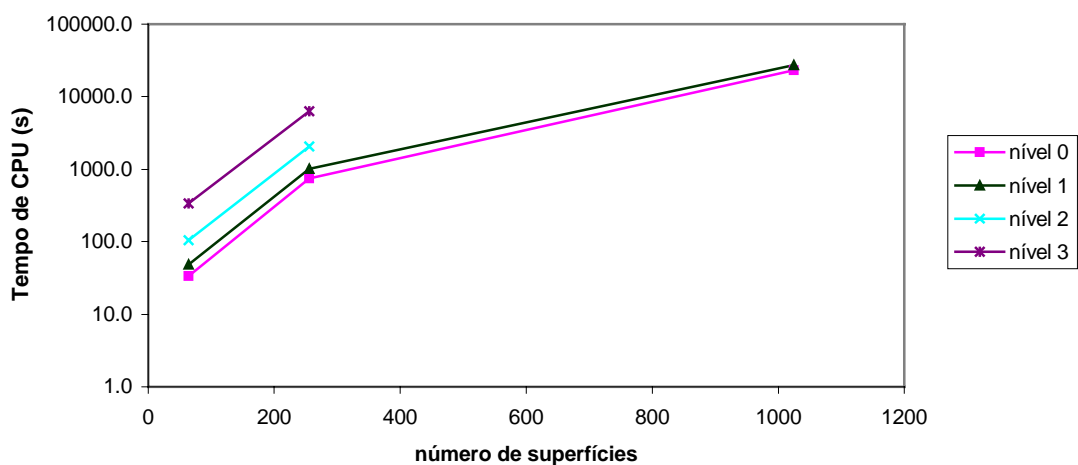
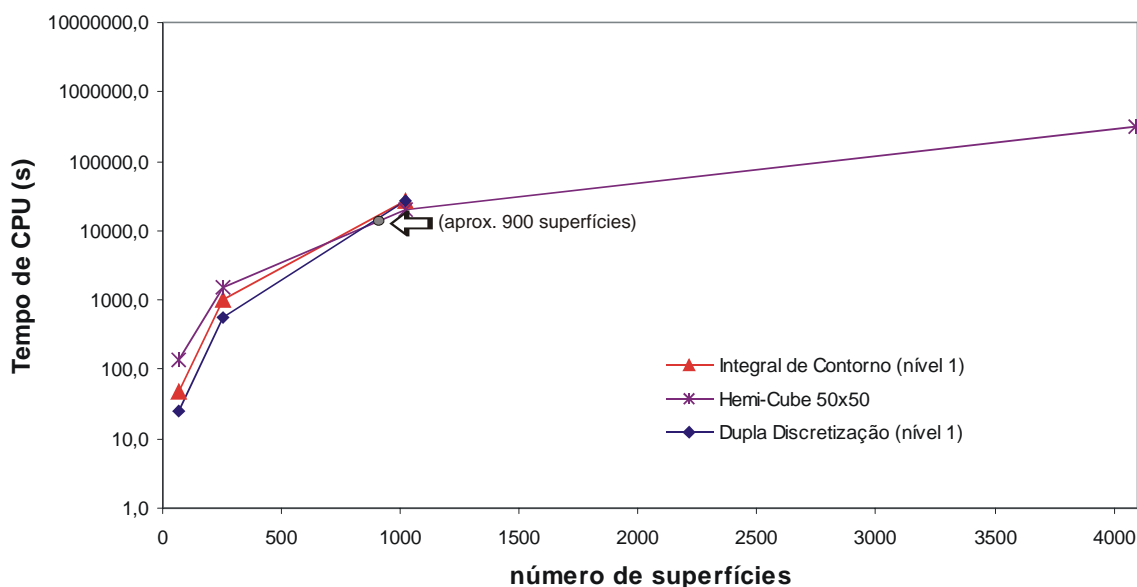


Figura 6.29– Paralelepípedo com obstrução:
Performance do Método da Integral de Contorno

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,841 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 9:59 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 156 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

Finalmente, podemos realizar uma comparação similar àquela realizada na configuração anterior e ratificarmos as afirmações anteriormente realizadas sobre o comportamento dos métodos. A Fig.6.30, a seguir, apresenta os gráficos para os três métodos.

Paralelepípedo com obstrução - Comparação dos Métodos



**Figura 6.30– Paralelepípedo com obstrução:
Comparação da performance dos métodos**

De maneira análoga podemos verificar que a partir de um determinado número de superfícies (neste caso aprox. 900) o método Hemi-Cube com uma resolução de 50x50 começa a apresentar-se mais rápido computacionalmente quando comparado com o método da Integral de Contorno e Dupla discretização utilizando um nível 1 de sub-divisões na superfície.

6.4 Validação Numérica dos Métodos para a Solução do Problema Radiativo-Conduutivo

Esta seção tem o objetivo de apresentar os testes realizados para a validação numérica dos algoritmos implementados. Para este fim, dois casos testes foram modelados os resultados encontram-se a seguir. Em virtude da escassez de soluções padrão envolvendo aplicações

práticas disponíveis na literatura, foram utilizados problemas simples e de fácil comparação.

6.4.1 Condução Bi-Dimensional

O primeiro caso simulado, ilustrado na Fig.6.31, visou a comparação somente do algoritmo que calcula a troca de calor por condução bi-dimensional utilizando malhas triangulares. Este problema consiste na condução de calor em regime permanente em uma placa (1x1) possuindo uma temperatura constante de 288.15 K prescrita em uma de suas faces e as outras faces possuindo temperatura prescrita de 283.15 K.

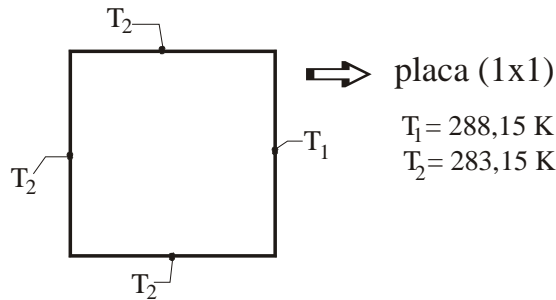


Figura 6.31– Problema da condução bi-dimensional em uma placa plana com temperatura prescrita nas faces

A equação que rege o problema acima, em um meio homogêneo, é dada pela seguinte expressão

$$\nabla^2 T = 0 \quad (6.4)$$

No caso de temperaturas prescritas nas faces de uma placa unitária (1x1), onde somente uma das temperaturas é diferente das outras, a equação anterior possui solução analítica dada por (Incropera e DeWitt, 1992)

$$\frac{T(x, y) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)} \quad (6.5)$$

De posse desta expressão, que fornece o campo de temperaturas em qualquer posição da placa, podemos comparar os resultados numéricos.

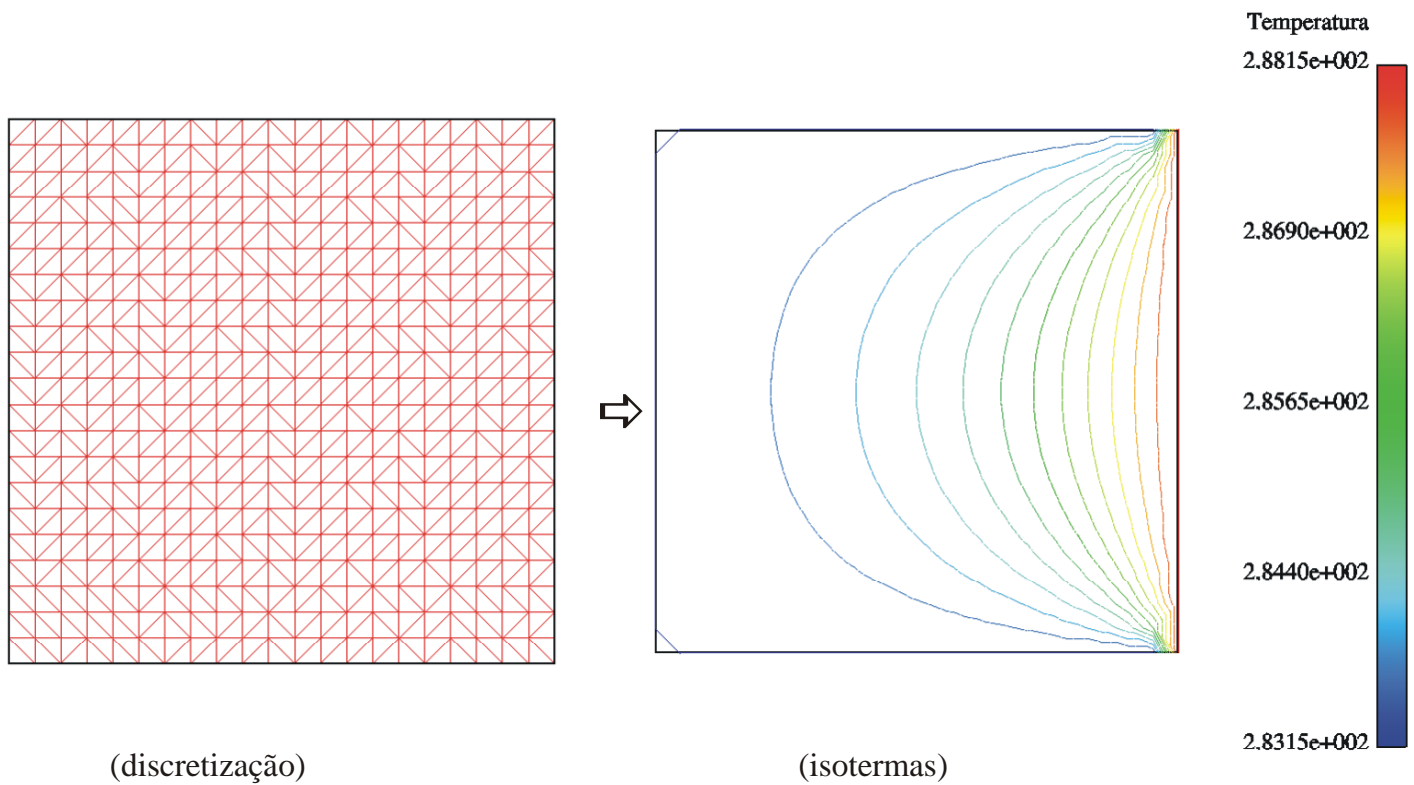


Figura 6.32– Malha simulada e campo de isotermas obtidas o problema da condução bi-dimensional em uma placa plana com temperatura prescrita nas faces

A Fig.6.32 ilustra a malha triangular utilizada e o campo de isotermas obtidos da simulação. A comparação com a solução analítica é apresentada na Fig.6.33 e na Fig.6.34. Nestas figuras os perfis de temperatura ao longo das retas $x = 0,5$ e $y = 0,5$ obtidos com a solução analítica é apresentado juntamente com a solução numérica.

Analisando estes gráficos podemos concluir que o algoritmo construído baseado nas técnicas de CVFEM, utilizado aqui para resolver o problema da condução está corretamente implementado.

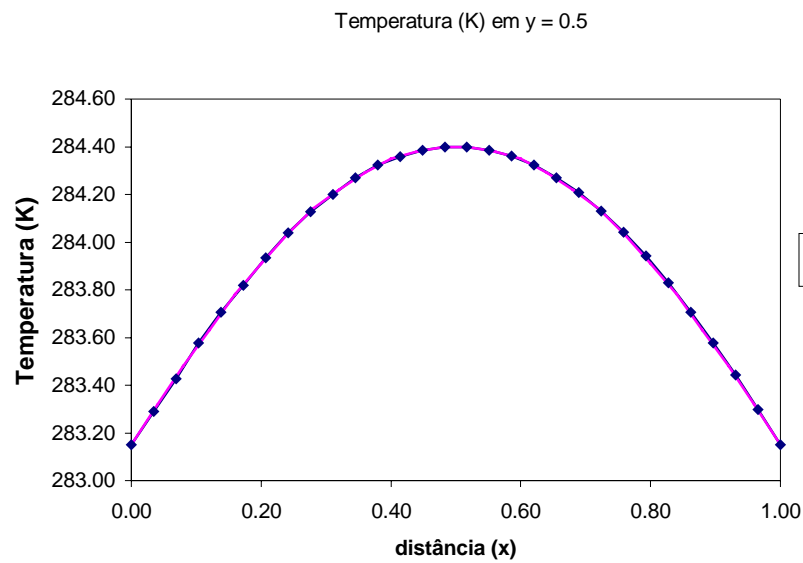


Figura 6.33– Perfil de temperatura ao longo da reta $y = 0.5$

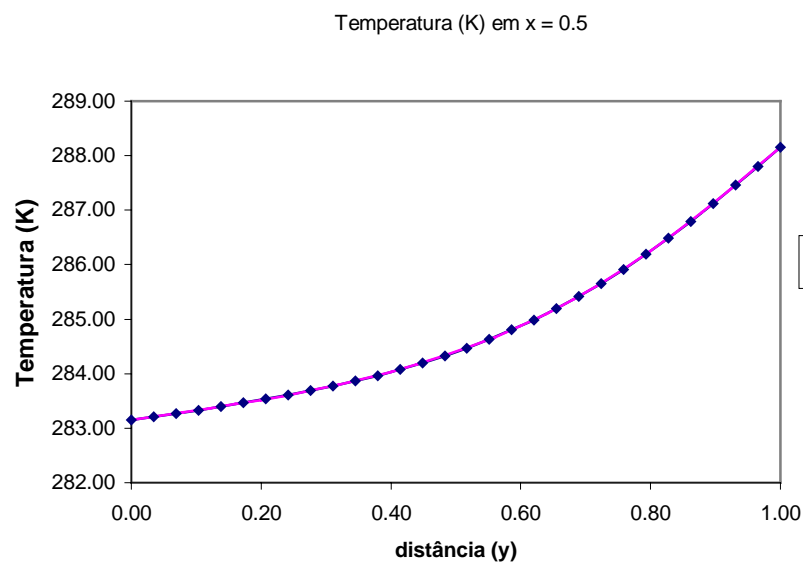


Figura 6.34– Perfil de temperatura ao longo da reta $x = 0.5$

6.4.2 Aleta Radiativa

O segundo problema utilizado para validação dos algoritmos utilizados neste estudo foi o problema de uma aleta colocada no espaço (*in vácuo*), trocando calor com as redondezas

através do fenômeno da radiação. Este problema está ilustrado na Fig.6.35.

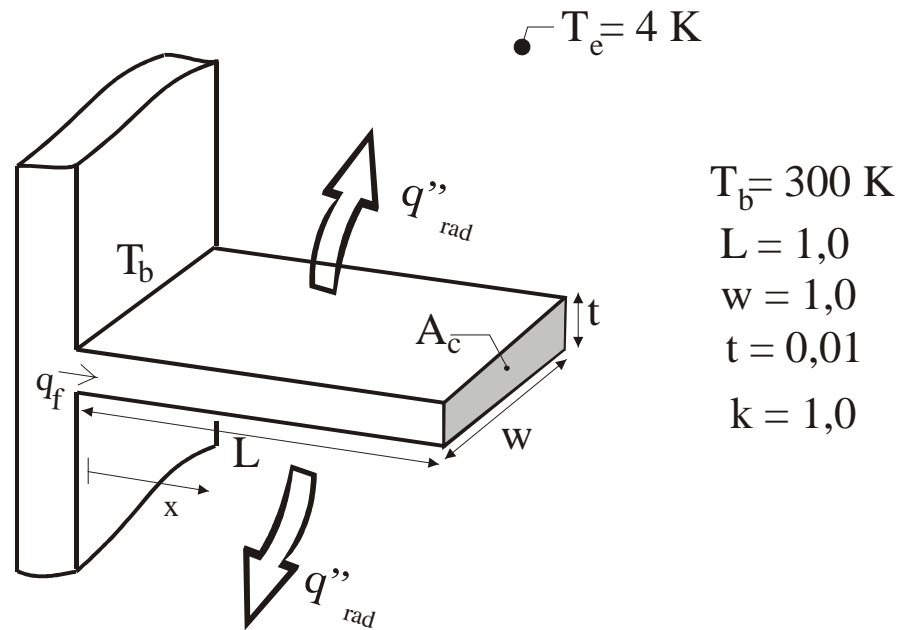


Figura 6.35– Problema da aleta radiativa

Analizando Fig.6.35 podemos perceber que a transferência de calor ao longo da aleta será unidimensional. Em virtude da dificuldade de obtermos uma solução analítica para este problema, foi construído um algoritmo especial para resolver a equação que governa a troca de calor nesta superfície expandida.

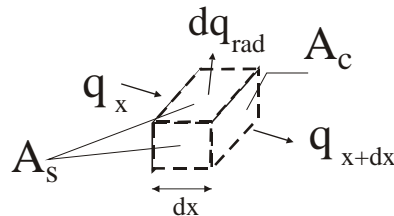


Figura 6.36– Balanço de energia em um volume de controle de uma aleta radiativa

Realizando um balanço de energia em um volume de controle infinitesimal, de acordo com a Fig.6.36, obtemos as seguintes expressões

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{rad} \quad (6.6)$$

onde,

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx}, \quad (6.7)$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx, \text{ e} \quad (6.8)$$

$$dq_{rad} = \varepsilon \sigma dA_s (T^4 - T_e^4) \quad (6.9)$$

Nas equações acima, dA_s é a área superficial da aleta, dA_c é área da seção transversal, ε a emissividade da superfície, k a condutividade térmica da aleta e T_e a temperatura do espaço.

Substituindo as Eqs.(6.7), (6.8) e (6.9) na expressão do balanço (6.6), e assumindo que as áreas da seção transversal são constantes, obtemos a expressão que, quando resolvida, fornece o perfil de temperatura ao longo da aleta, dada a seguir

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\varepsilon \sigma}{k} \frac{dA_s}{dx} \frac{1}{A_c} (T^4 - T_e^4) \quad (6.10)$$

Reconhecendo que

$$\frac{dA_s}{dx} = P, \text{ (perímetro da aleta)} \quad (6.11)$$

podemos definir então duas constantes C_1 e C_2 , dadas por

$$C_1 = \frac{\varepsilon \sigma}{k} \frac{P}{A_c}, \text{ e} \quad (6.12)$$

$$C_2 = C_1 \cdot T_e^4 \quad (6.13)$$

Assim, reescrevemos a Eq.(6.10) da seguinte forma

$$\frac{d^2T}{dx^2} = C_1 T^4 - C_2 \quad (6.14)$$

ou de uma maneira mais compacta, dada por

$$\frac{d^2T}{dx^2} = S(T) \quad (6.15)$$

onde

$$S(T) = C_1 T^4 - C_2 \quad (6.16)$$

Visando a solução destas equações, neste presente estudo utilizamos a técnica de

volumes finitos (Maliska, 1995), integrando a Eq.6.15 ao longo do elemento P , na malha unidimensional ilustrada na figura a seguir.

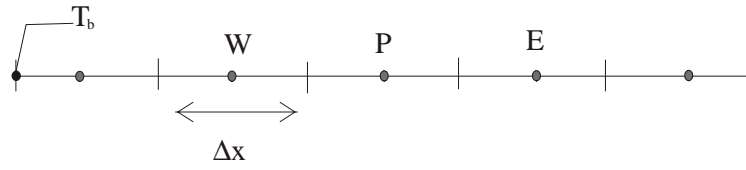


Figura 6.37– Malha unidimensional para o problema da aleta radiativa

Como o termo fonte $S(T)$ da Eq.6.15 é altamente não linear, propomos uma linearização da seguinte forma

$$S(T) = S_p T + S_c \quad (6.17)$$

onde,

$$S_p = -C_1 T^3, \text{ e} \quad (6.18)$$

$$S_c = C_2 \quad (6.19)$$

Após a integração da Eq.6.15 ao longo do volume P , e aplicando as condições de contorno de temperatura prescrita na base da aleta e de fluxo nulo na extremidade, obtemos o seguinte conjunto de expressões algébricas que necessitam de ser resolvidas para a obtenção do campo de temperaturas

$$A_p T_p = A_e T_e + A_w T_w + B \quad (6.20)$$

onde os coeficientes desta equação para os volumes dos centros são dados por

$$A_e = A_w = \frac{1}{\Delta x} \quad (6.21)$$

$$A_p = A_e + A_w - S_p \Delta x \quad (6.22)$$

$$B = S_c \Delta x \quad (6.23)$$

Para o canto esquerdo, onde a temperatura é prescrita temos

$$A_e = \frac{1}{\Delta x}, A_w = 0 \quad (6.24)$$

$$A_p = A_e + A_w - S_p \Delta x + \frac{2}{\Delta x} \quad (6.25)$$

$$B = S_c \Delta x + \frac{2T_b}{\Delta x} \quad (6.26)$$

Finalmente, na extremidade da aleta onde o gradiente de temperatura é nulo temos

$$A_w = \frac{1}{\Delta x}, A_e = 0 \quad (6.27)$$

$$A_p = A_e + A_w - S_p \Delta x \quad (6.28)$$

$$B = S_c \Delta x \quad (6.29)$$

No presente trabalho o sistema apresentado na Eq.(6.20) foi resolvido utilizando um solver iterativo ponto a ponto e a malha utilizada possuía 100 elementos ao longo da aleta.

Os resultados obtidos com a solução acima descrita estão apresentados na Fig.6.38 na curva chamada *Benchmark*.

Como o objetivo na obtenção desta solução era a validação dos algoritmos bidimensionais construídos para resolver o problema radiativo-condutivo utilizando os métodos de Gebhart e da Radiosidade, é ilustrado neste gráfico também as soluções obtidas com estes códigos utilizando malhas condutivas idênticas as malhas radiativas, possuindo 25, 49 e 144 nós. A única alteração na solução deste problema é que para compararmos estes dois algoritmos com a solução unidimensional, tivemos que, nesta última, desprezar as trocas de calor nas superfícies laterais da aleta, pois os algoritmos aqui desenvolvidos desconsideram as faces laterais. Isto é facilmente introduzindo alterando-se o perímetro da aleta da Fig.6.35.

Analisando este gráfico podemos perceber que a medida que vamos refinando a malha os dois algoritmos caminham para a mesma solução *Benchmark*. Praticamente, neste estudo, não é verificado nenhuma diferença com relação as aproximações realizadas nos métodos da Radiosidade e Gebhart acoplados com a solução do algoritmos que resolve a condução de calor. Para a mesma malha as diferenças entre os resultados são mínimas.

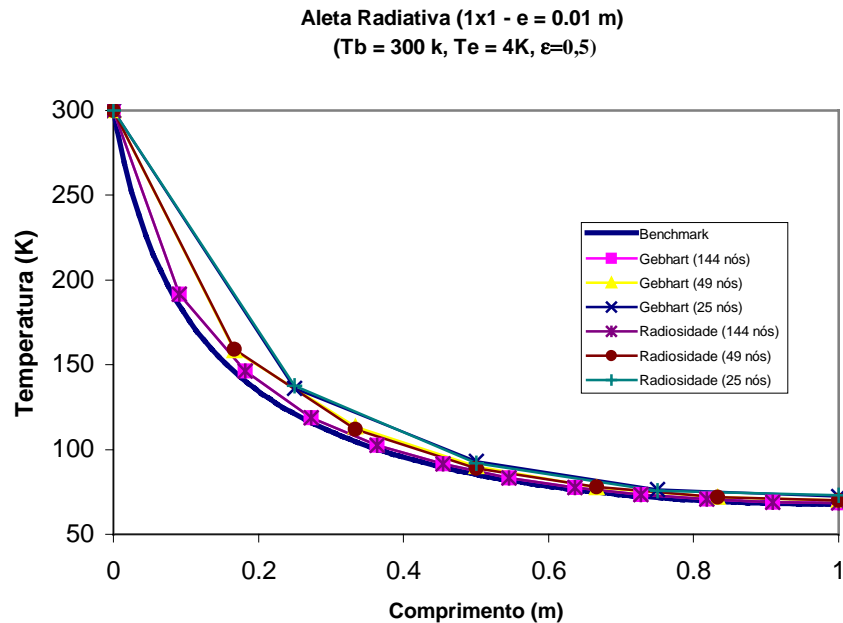


Figura 6.38— Perfil de temperatura ao longo da direção x obtido para o problema da aleta radiativa

6.5 Comparação dos Métodos para a Solução do Problema Radiativo-Condutivo

Depois de estudarmos as técnicas para o cálculo do fator de forma e validarmos os algoritmos do método de Gebhart e do método das Radiosidades unidos à solução da condução de calor nas placas, partiu-se para um estudo comparativo da performance destes dois últimos métodos. Aspectos como convergência da solução, tempo de processamento e estabilidade do acoplamento entre as equações serão discutidos nesta seção.

6.5.1 Radiação e Condução entre Placas Planas

Visando o estudo do comportamento deste dois métodos, o problema ilustrado na Fig.6.39 foi modelado.

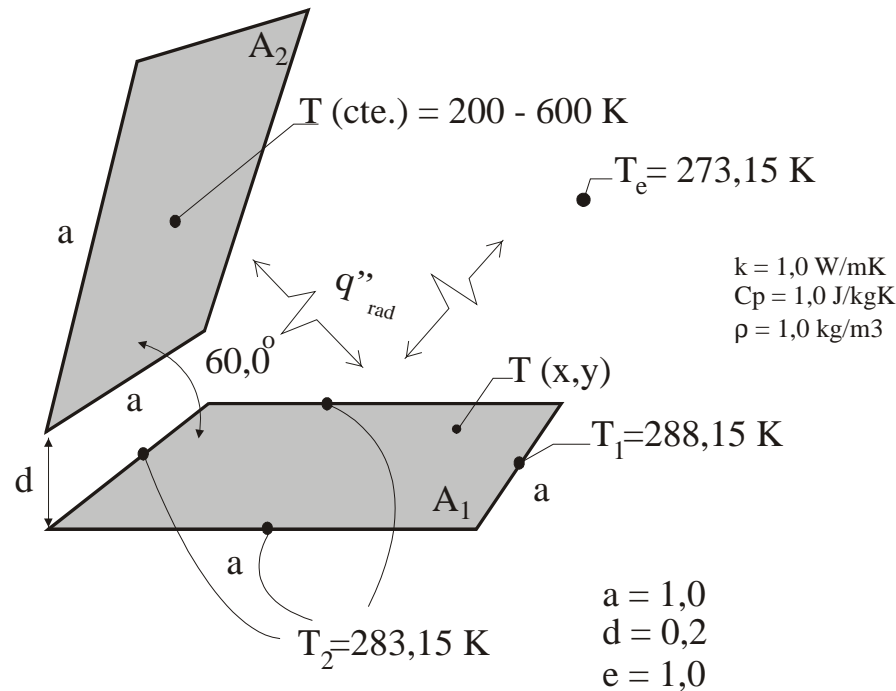


Figura 6.39– Esquema do problema radiativo-condutivo utilizado para a comparação dos métodos de Gebhart e Radiosidade

Este problema consiste em duas placas planas unitárias (1x1) formando um ângulo de 60° entre si. A placa inclinada (A_2) possui uma temperatura prescrita em toda a sua extensão enquanto a placa A_1 possui temperaturas especificadas apenas em suas fronteiras. Ambas as placas trocam calor por radiação com o espaço que se encontra a 273,15 K. A placa A_1 possui as temperaturas especificadas da mesma maneira que o problema puramente condutivo apresentado para validação do algoritmo de condução de calor, ou seja, uma de suas fronteiras se encontra a 288,15 K e as outras três fronteiras se encontram a 283,15 K. A borda inferior da placa A_2 se encontra a 0,2 da placa A_1 . As duas placas trocam calor por radiação pelos seus dois lados e suas emissividades no espectro infra-vermelho valem 0,5.

O objetivo deste teste é a determinação do campo de temperaturas em A_1 à medida que varia-se o valor da temperatura em A_2 . Realizando esta variação de temperatura, estaremos levando o problema para níveis altos de troca de calor por radiação e assim poderemos verificar a sensibilidade destas duas metodologias frente a estas situações.

Neste estudo, variou-se a temperatura de A_2 de 200 a 600K e analisou-se a sensibilidade dos métodos frente a esta variação.

A malha utilizada para este estudo está ilustrada na Fig.6.40. Com o objetivo de facilitar as análises a malha radiativa é idêntica a malha condutiva, possuindo 100 nós na placa A_1 .

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,842 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 10:00 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 156 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

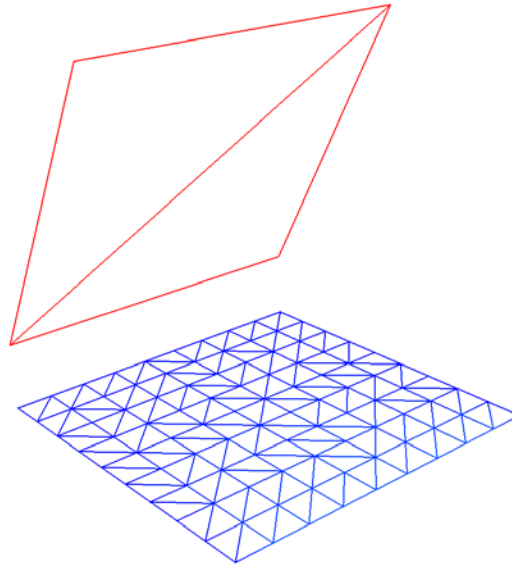


Figura 6.40– Malha utilizada para o problema radiativo-condutivo

Analizando a figura anterior, podemos perceber que malha da superfície A_1 é grosseira, pois nela já conhecemos a temperatura. Como não temos obstruções, este fator também não influenciara no cálculo das trocas radiativas.

De posse desta discretização, foi calculado o fator de forma entre os elementos triangulares das superfícies e deles para o espaço. O campo de fator de forma de cada um dos elementos triangulares de A_2 para os elementos de A_1 é mostrado na Fig.6.41.

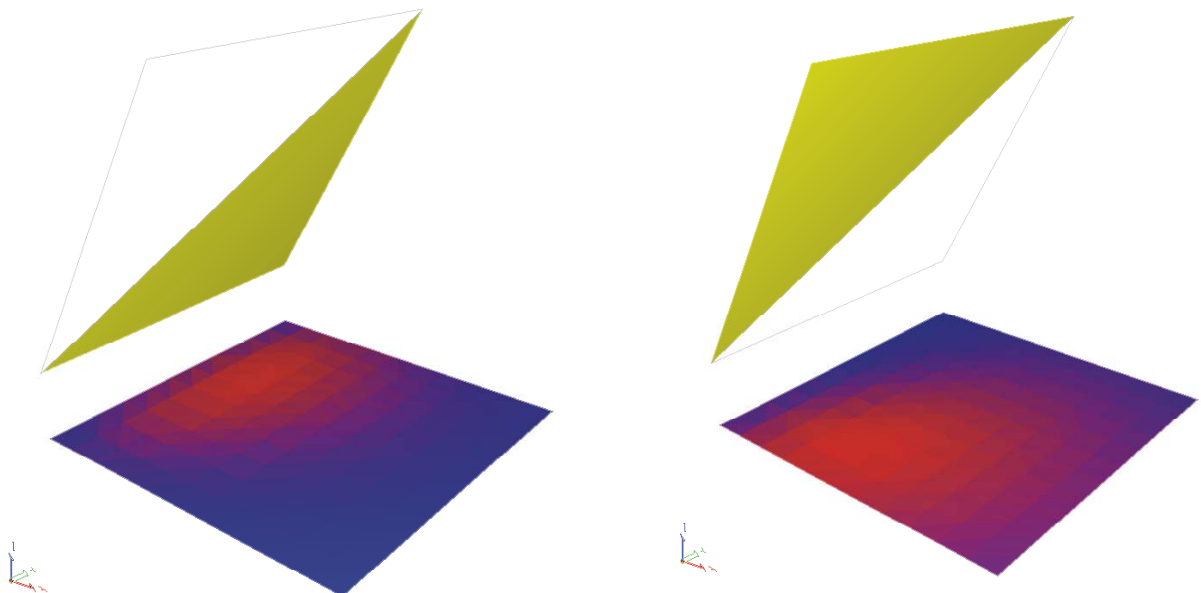


Figura 6.41–Campo de fator de forma para o problema radiativo-condutivo

Foram simulados 10 situações, para $T_2 = 200, 250, 273,15, 300, 350, 400, 450, 500, 550$ e 600K . A título ilustrativo, as isothermas em A_1 para estas diversas situações são apresentadas da Fig.6.42 até Fig.6.46.

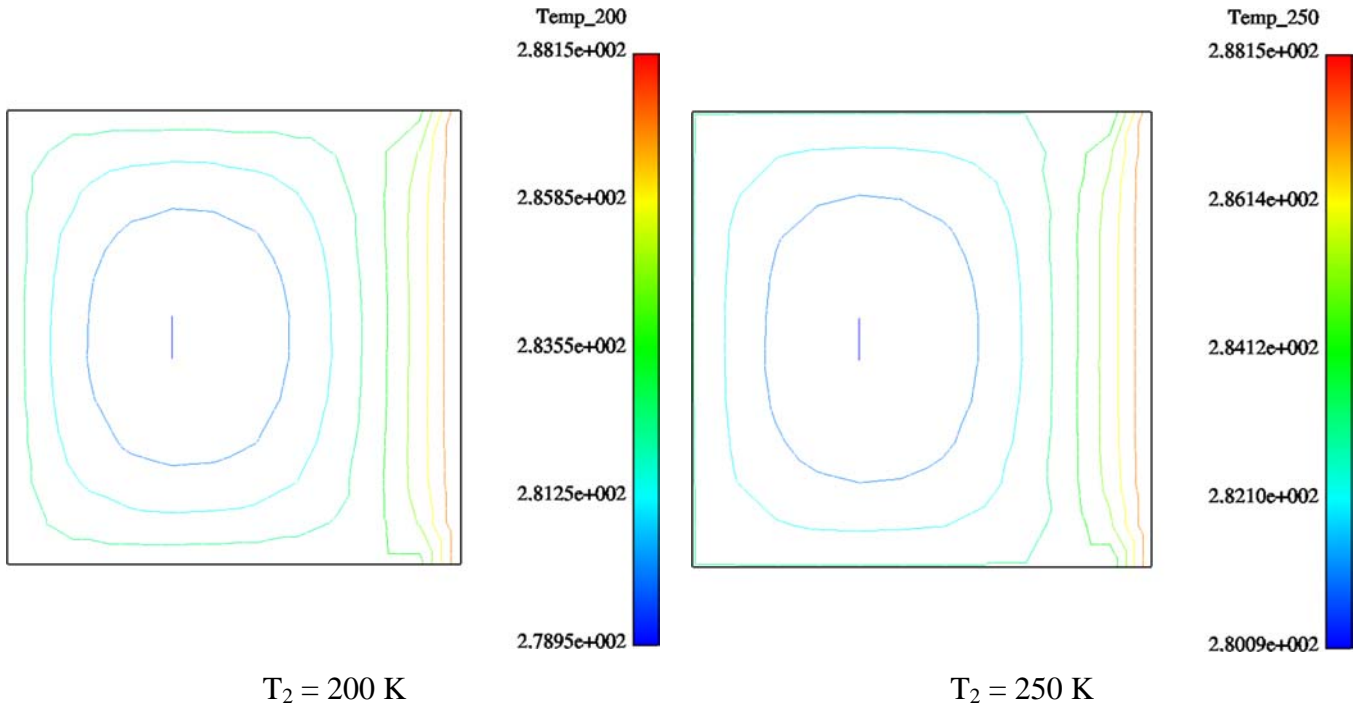


Figura 6.42–Isothermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 200$ e 250 K)

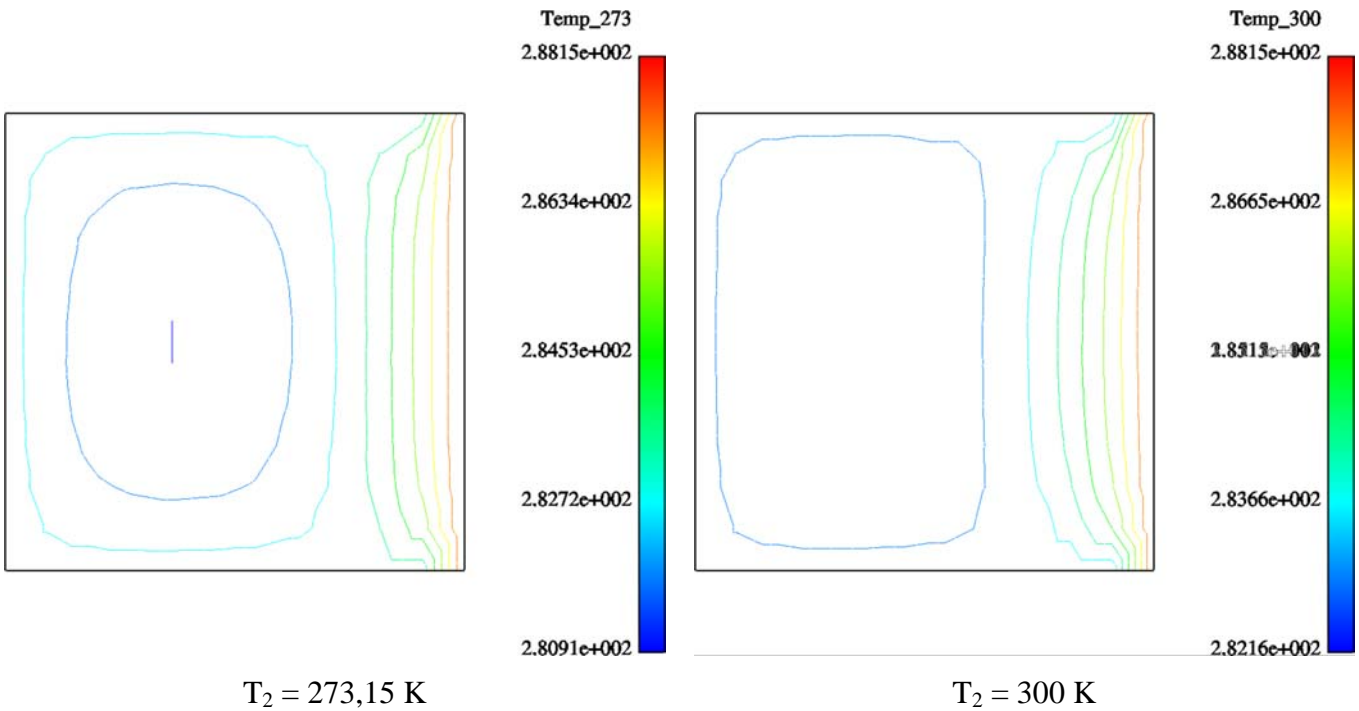


Figura 6.43– Isothermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 273$ e 300 K)

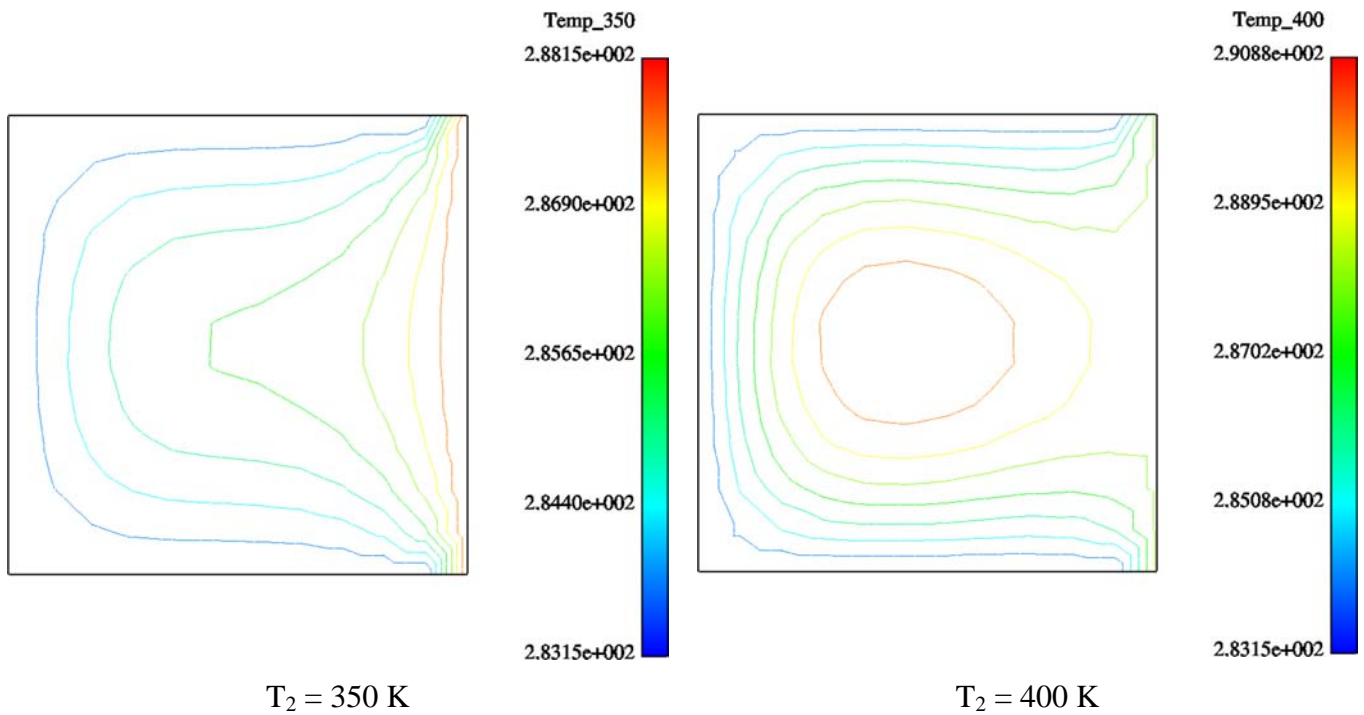


Figura 6.44– Isotermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 350$ e 400 K)

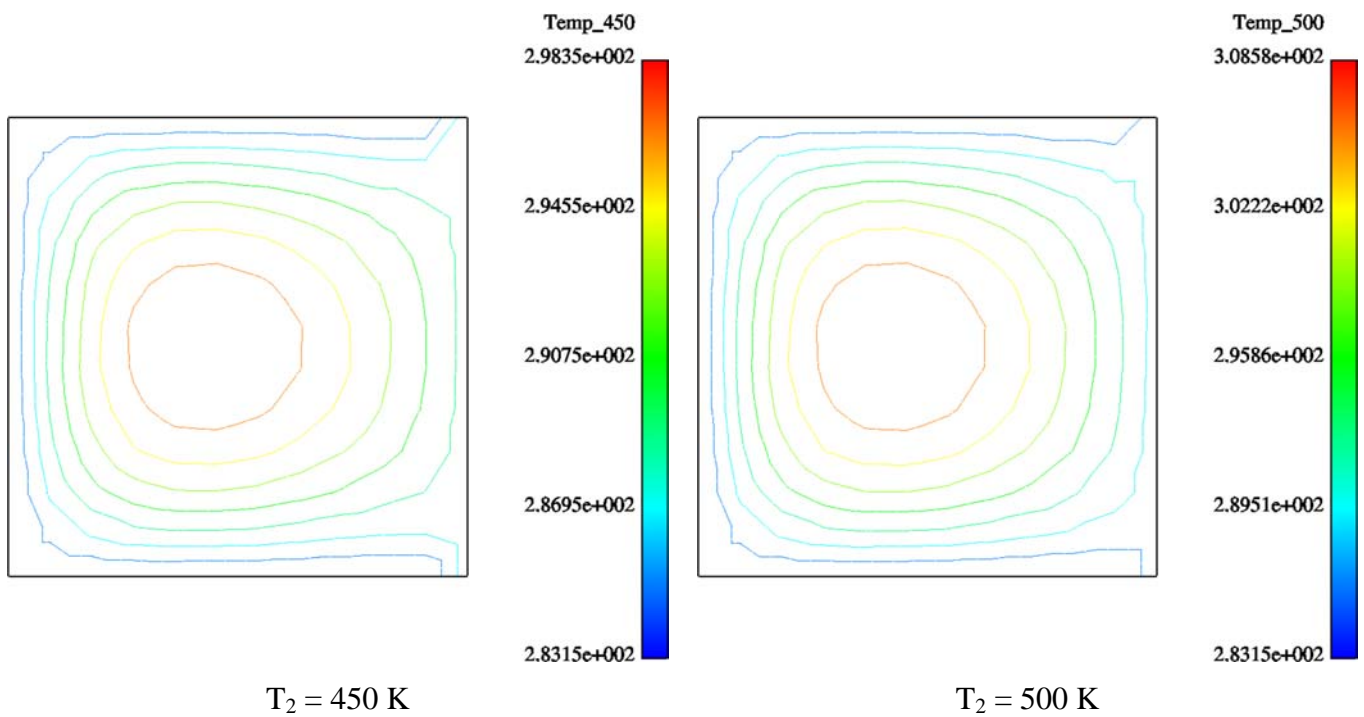


Figura 6.45– Isotermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 450$ e 500 K)

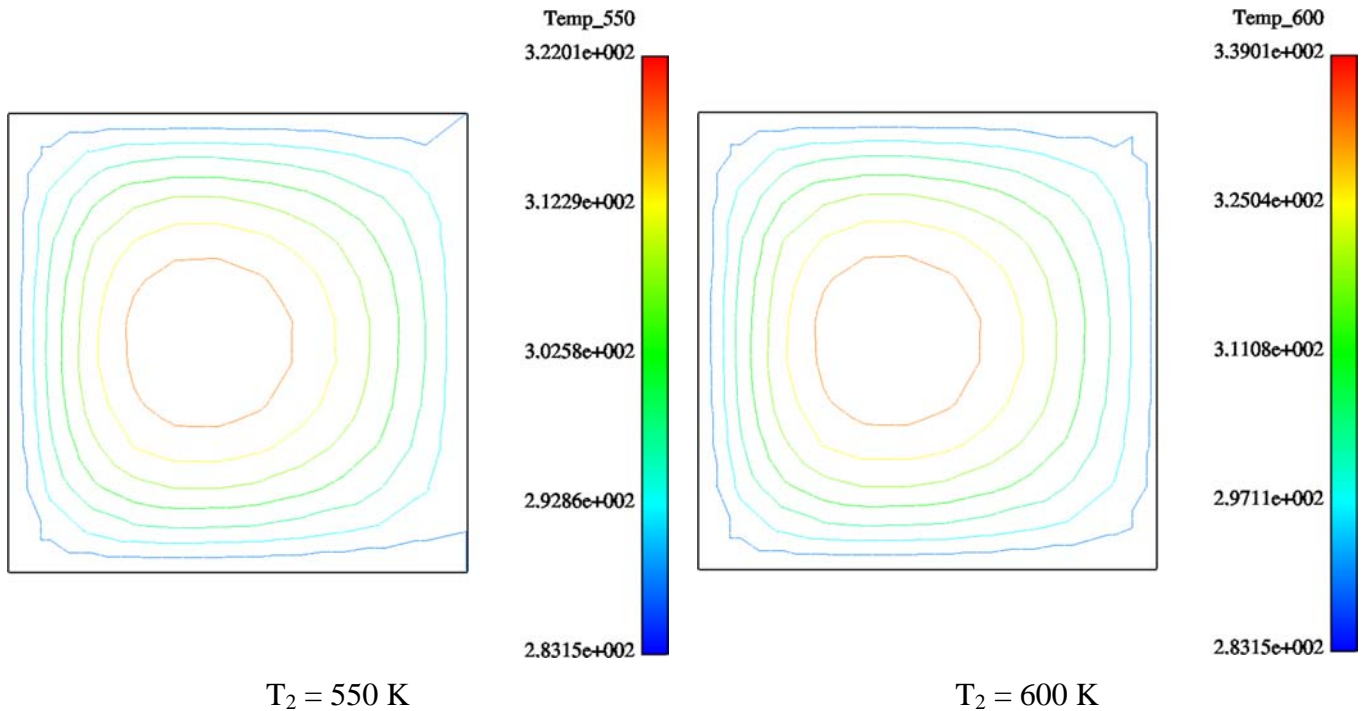
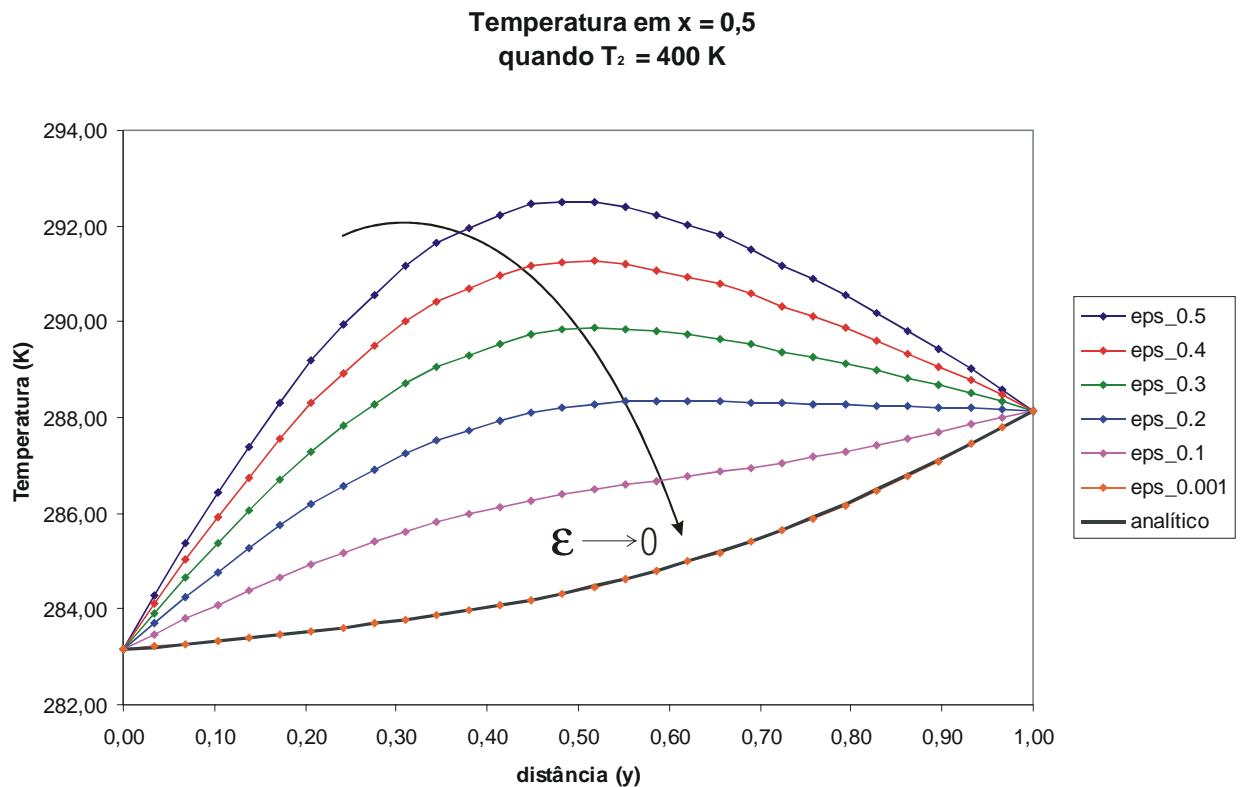


Figura 6.46– Isotermas obtidas do problema radiativo-condutivo ($T_2 = 550$ e 600 K)

Analisando as figuras anteriores podemos perceber que o campo de temperaturas em A_1 é fortemente influenciado pela temperatura de A_2 . Em virtude da temperatura do espaço ($273,15\text{K}$) ser próxima da temperatura de A_1 , o mesmo não exerce muita influência radiativamente sobre esta placa.

Pode-se também perceber que as maiores variações acontecem quando a temperatura de A_2 ultrapassa 300K . Este fato faz com que o campo de temperaturas em A_1 seja dominado mais pelas trocas radiativas do que pelo calor advindo por condução de suas fronteiras que possuem temperaturas prescritas em torno de 285 K , fazendo com que, a altas temperaturas de A_2 , o problema seja predominantemente radiativo.

Um exemplo interessante para analisarmos o efeito da troca de calor por radiação neste problema é ilustrado no gráfico da Fig.6.47, onde para $T_2 = 400 \text{ K}$, variamos o valor da emissividade em A_1 até isolá-la completamente dos efeitos radiativos. Podemos observar que à medida que a sua emissividade vai sendo reduzida, o perfil de temperatura recupera aquele da expressão analítica do problema puramente condutivo ilustrado na Fig.6.34.



6.5.1.1 Análise da Convergência dos Métodos

Como já dito anteriormente, à medida que aumentamos a temperatura de A_2 , o problema torna-se radiativo dominante. Como podemos ver nas figuras a seguir, este fator influencia a convergência dos métodos.

Ambos os métodos foram simulados utilizando um solver iterativo (GMRES) e foi admitido como convergido a situação quando o campo de temperaturas apresentava variações menores do que 10^{-5} . As curvas a seguir ilustram o número de iterações do resíduo não-linear, ou seja, do processo iterativo entre as equações radiativas e condutivas. No caso do método de Gebhart este resíduo corresponde a cada passo iterativo do método de Newton. No caso do método da Radiosidade, como obtemos uma solução segregada das duas equações, este resíduo é computado entre as soluções do problema radiativo e condutivo.

A Fig.6.48 ilustra a curva de convergência obtida com o método de Gebhart. Podemos

observar que o fato de aumentarmos o caráter radiativo do problema dificulta um pouco a convergência. Observa-se também que necessitamos de um número bastante reduzido de iterações entre as equações para obtermos a convergência ($1e-5$). Em geral 2 ou 3 iterações são necessárias para atingirmos o critério de resíduo. Este fato é resultado do forte acoplamento entre as soluções radiativas e condutivas do problema que são resolvidas simultaneamente através da linearização do método de Newton.

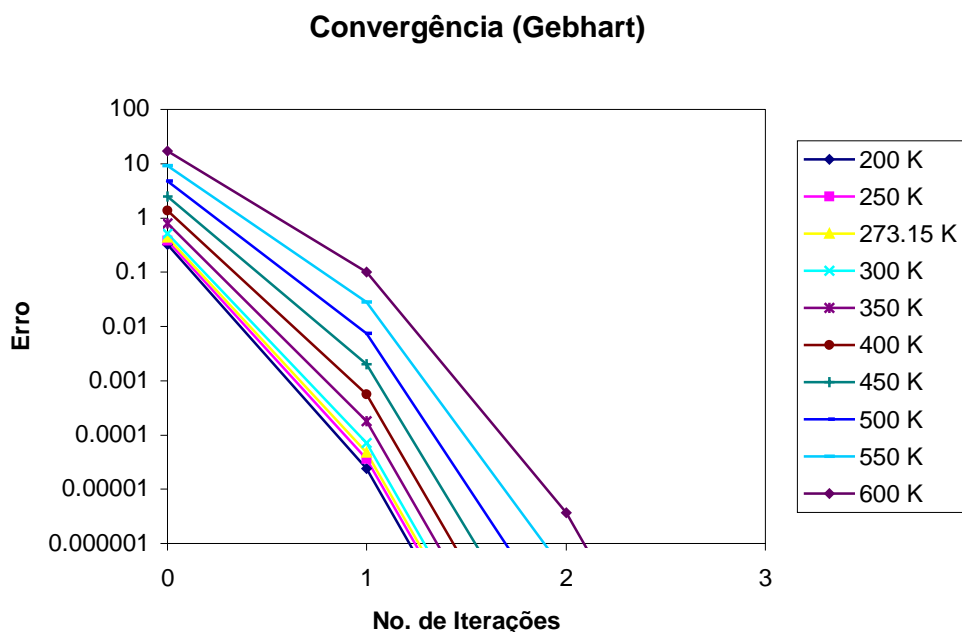
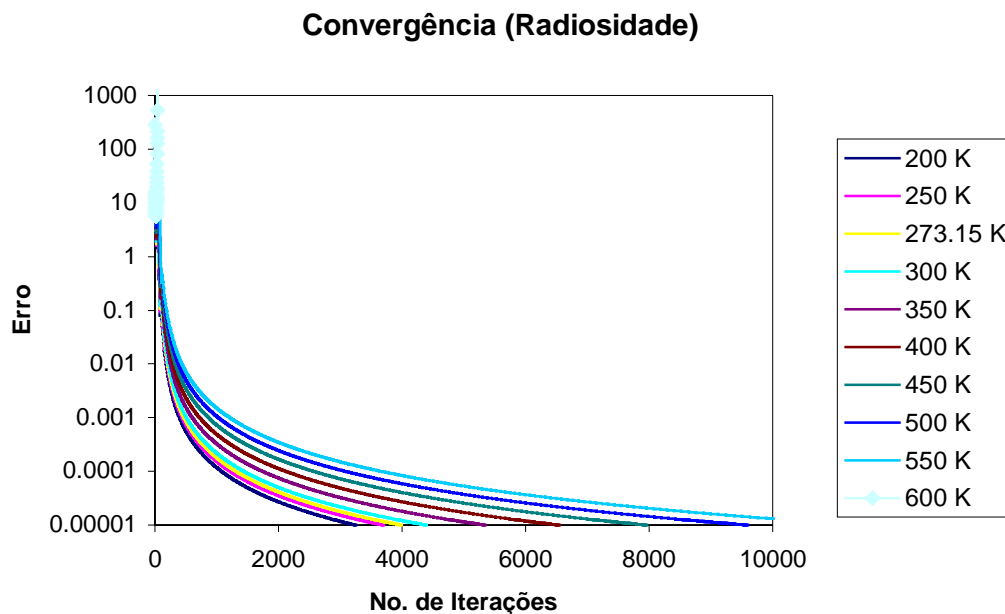


Figura 6.48–Convergência obtida com o método de Gebhart para diversos valores de T_2

A Fig.6.49 apresenta a convergência obtida com o método da Radiosidades acoplada com a solução da condução de calor. Para este problema, em virtude da forte não-linearidade entre as equações, foi utilizado um coeficiente de relaxação de 0,03 para o termo fonte da equação da condução, oriundo da solução radiativa.

De modo diferente do gráfico anterior, observa-se que são necessárias de 200 a 1000 iterações para obtermos a convergência. Pode-se também concluir que o número de iterações necessárias para a obtenção da convergência aumenta consideravelmente com o aumento do caráter radiativo do problema. Analisando este gráfico observa-se uma lenta convergência do resíduo das equações a partir da metade do número de iterações. Isto é devido ao fato de estarmos utilizando um único coeficiente de relaxação ao longo de todo o problema. Como é sabido que os maiores gradientes térmicos acontecem nos primeiros passos do processo

iterativo, esta convergência poderia ser melhorada se em um momento adequado fosse aumentado gradativamente este coeficiente de relaxação. Este procedimento não foi feito neste estudo.



Uma outra característica importante deste método é a forte dependência da convergência com o coeficiente de relaxação utilizado. Como dito anteriormente, são nas primeiras iterações do problema onde verifica-se os maiores gradientes térmicos. Assim, quando utilizamos este método, cuidado deve ser tomado para a que o problema não divirja nestas primeiras etapas. O gráfico apresentado na Fig.6.50 ilustra as mesmas curvas apresentadas no gráfico anterior, mas desta vez é realizado uma ampliação na escala para podermos entender o que acontece durante as primeiras iterações.

Analisando esta figura podemos verificar fortes oscilações na convergência durante as primeiras 50 iterações do processo, mesmo utilizando um coeficiente de relaxação baixo (0,03). Observa-se também que a amplitude destas oscilações vai aumentando a medida que a temperatura de T_2 cresce. Isto é uma consequência lógica do fato de que o valor do termo fonte da equação vai crescendo na mesma proporção que esta temperatura aumenta.

Durante a realização deste trabalho vários valores de coeficientes de relaxação foram utilizados, mas em virtude de ser um parâmetro fortemente dependente do problema, se torna

difícil a obtenção de valor ótimo recomendado para todos os casos.

Neste problema, com já dito, foi utilizado um coeficiente de relaxação de 0,03. Tentou-se, obviamente, valores um pouco maiores, como 0,1, mas o problema divergia mesmo para valores baixos de T_2 . Mesmo com a utilização de um coeficiente pequeno (0,03), quando atingimos a temperatura de 600K para a placa superior, não obtemos convergência, como observado pela linha mais escura do gráfico a seguir.

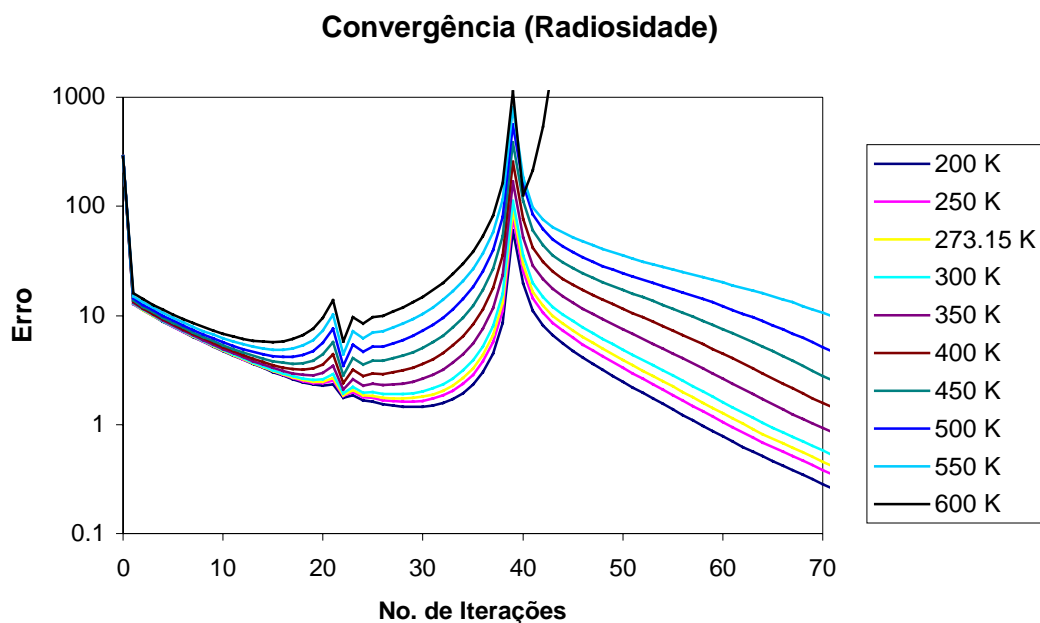


Figura 6.50– Convergência obtida com o método da Radiosidade para diversos valores de T_2 (Zoom)

Esta dificuldade e lenta resposta da convergência apresentada pela solução com o método da Radiosidade à medida que vamos aumentando a temperatura T_2 , é resultado direto do fraco acoplamento entre as equações condutivas e radiativas que são resolvidas separadamente. Como em problemas radiativos o caráter não-linear é alto, em termos de curva de convergência, quanto mais acoplada for a solução, melhor ela será.

A maneira explícita de solução do problema acoplado radiativo-condutivo resolvido aqui com método da Radiosidade fornece uma característica muito instável a solução do problema durante os primeiros passos do ciclo iterativo. A medida que obtemos uma estabilidade na convergência, a mesma se torna muito lenta. Esta característica foi observada todos outros inúmeros testes realizados durante este estudo, sendo apresentado aqui somente para este problema, escolhido em função de seu caráter bastante ilustrativo.

É fácil de perceber que todos os fatores anteriormente citados são extremamente sensíveis ao valor deste coeficiente de relaxação. Como existe um valor ótimo para cada problema, em caráter de convergência, este método apresenta-se muito inferior ao método de Gebhart.

Além da convergência, o tempo de computação deve ser avaliado para podermos possuir uma comparação ideal sobre as eficiências computacionais dos métodos, pois de nada adianta termos métodos com excelente taxa da convergência mas que demoram demasiadamente para realizar cada iteração. Este assunto é o objeto de análise da próxima seção.

6.5.1.2 Análise do Tempo de Processamento

Os gráficos a seguir, apresentados na Fig.6.51 e 6.52 ilustram o tempo de processamento necessário para a obtenção do tempo da convergência nos dois métodos em estudo. Estes tempos de processamento foram obtidos em um microcomputador Pentium III 700 Mhz com 256 Mb de memória RAM.

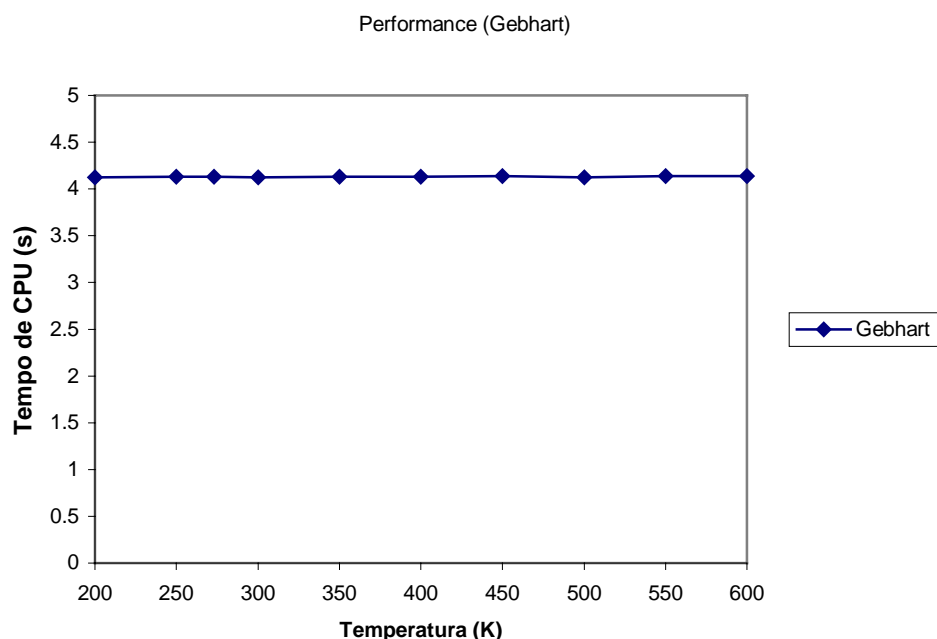


Figura 6.51– Tempo de processamento do método de Gebhart para diversos valores de T_2

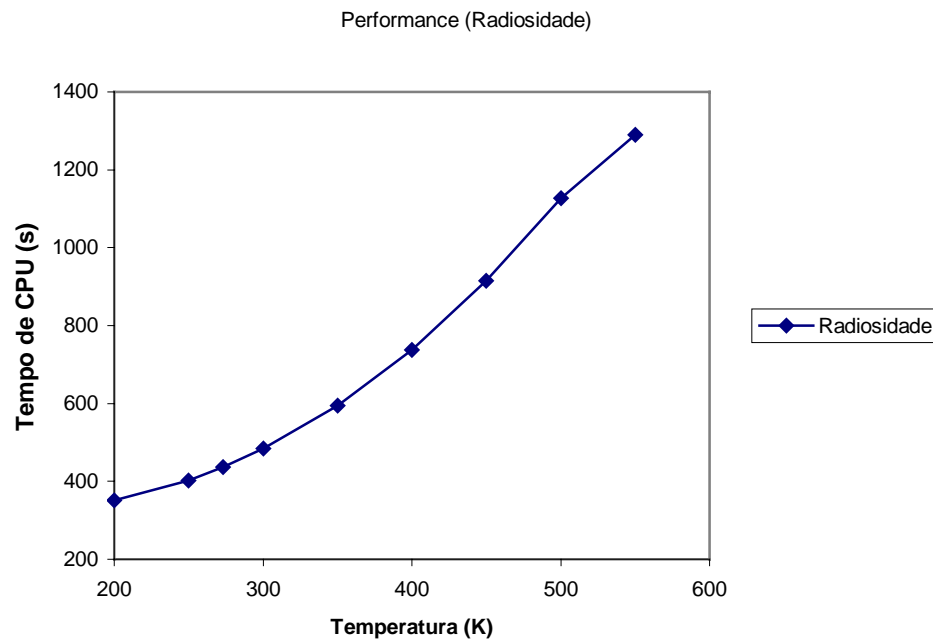


Figura 6.52– Tempo de processamento do método da Radiosidade para diversos valores de T_2

Analisando as figuras acima, podemos verificar que o tempo de processamento necessário para a atingirmos a convergência utilizando o método de Gebhart praticamente não se altera a medida que vamos aumentando a temperatura T_2 . Deve-se lembrar que o tempo de processamento mostrado no gráfico da Fig.6.51 inclui o cálculo dos acoplamentos radiativos conforme descrito no Capítulo 4. Ressalta-se que o tempo necessário para o cálculo dos acoplamentos radiativos é o mesmo para todas as situações simuladas, pois os acoplamentos não são função da temperatura e somente das propriedades dos materiais e do fator de forma entre os elementos.

Em média, o tempo necessário para o cálculo dos acoplamentos radiativos, para esta situação e com esta malha, é em torno de 4 segundos, sendo que o restante, aproximadamente 0,20 segundos, é o tempo necessário para a realização de todas as iterações do método de Newton. Acredita-se que o tempo de CPU para obtemos a convergência com o método de Newton deva crescer um pouco em virtude do aumento do caráter radiativo do problema, mas por estarmos tratando com valores muito pequenos, esta pequena diferença não tenha sido captada pelos sistemas de verificação de tempo de processamento utilizados neste estudo.

Por outro lado, analisando o gráfico da Fig.6.52 podemos verificar que o tempo de processamento utilizando o método das Radiosidades aumenta exponencialmente com o

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,842 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 10:00 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 156 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

aumento do caráter radiativo do problema. Isto é uma consequência direta do grande número de iterações necessário para a obtenção da convergência.

De posse destas duas análises envolvendo tempo de processamento e a convergência do problema, podemos concluir que a linearização das equações utilizando o método de Newton fornece uma solução muito mais rápida e eficiente do que a solução obtida utilizando o método das Radiosidades. Mesmo este último método resolvendo dois sistemas lineares mais simples (um para condução e outro para a radiação) isolados, a forte não-linearidade presente no acoplamento entre as equações faz com que esta solução seja muito mais demorada, sofrendo problemas de instabilidade e convergência.

6.6 Problema Ilustrativo

Com o intuito de ilustrar a flexibilidade do sistema construído em lidar com geometrias arbitrárias, o problema apresentado na Fig.6.53 foi modelado.

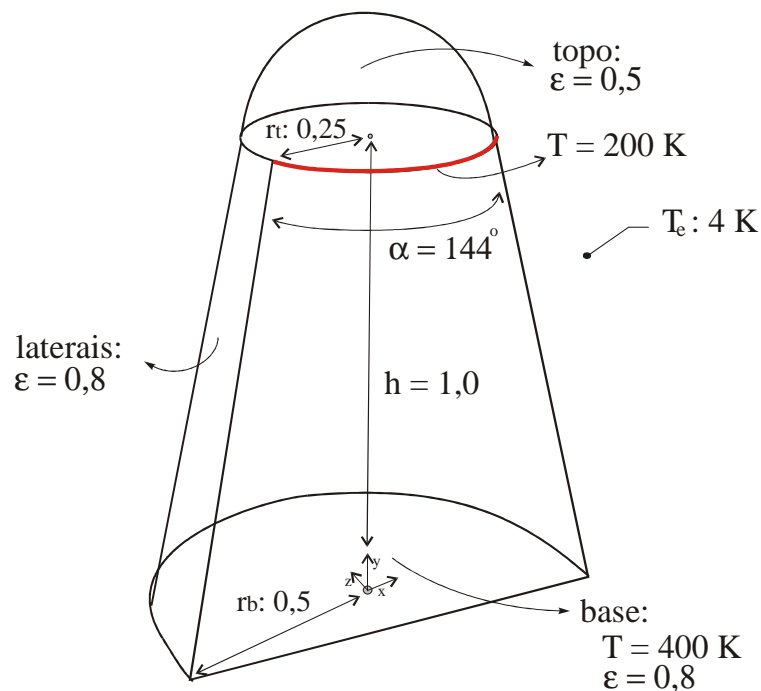


Figura 6.53– Problema ilustrativo

Este problema consiste em uma geometria semelhante a de um cone com um hemisfério em sua ponta, posicionado no espaço a 4K com uma abertura de 144° em sua lateral. A base desta geometria encontra-se a uma temperatura constante de 400K. Na região inferior do

hemisfério, ao longo de uma linha que contorna a abertura da face lateral, a temperatura é mantida a 200K.

Todas as superfícies deste problema trocam calor por radiação pelos dois lados, sendo que a emissividade da superfície lateral e da base vale 0,8 e a emissividade do topo vale 0,5.

O objetivo deste problema é avaliar a influência da radiação sobre a temperatura no topo desta geometria, ou seja, ao longo do hemisfério. Assim, foram simulados duas situações: a primeira envolvendo somente a troca térmica por condução e a segunda envolvendo também radiação.

A malha utilizada possuía aproximadamente 450 nós, apresentando um refino maior no hemisfério, conforme ilustrado na Fig.6.54. Neste caso, visando simplificar o modelo, a malha condutiva é idêntica a radiativa.

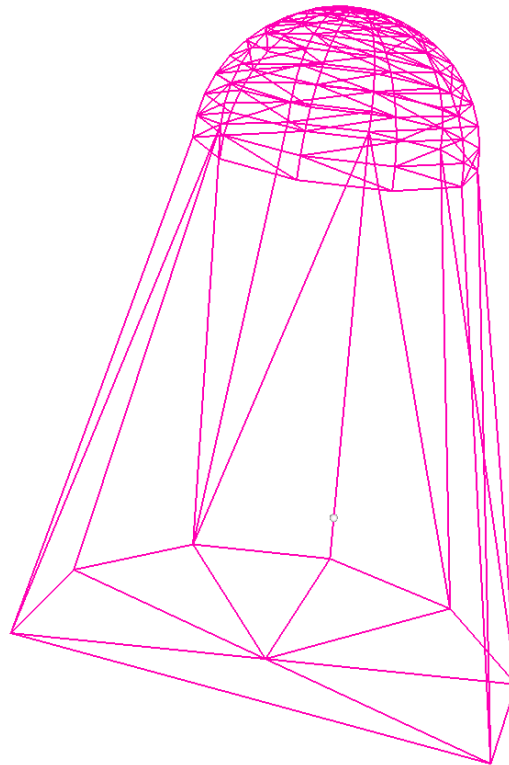


Figura 6.54– Discretização utilizada no problema ilustrativo

O modelo foi simulado utilizando o método de Gebhart e a convergência obtida em 6 iterações. Os resultados foram admitidos convergidos quando a variação da temperatura eram menores do que 10^{-5} . A Fig.6.55 e a Fig.6.56 ilustram o campo de temperaturas para as duas situações.

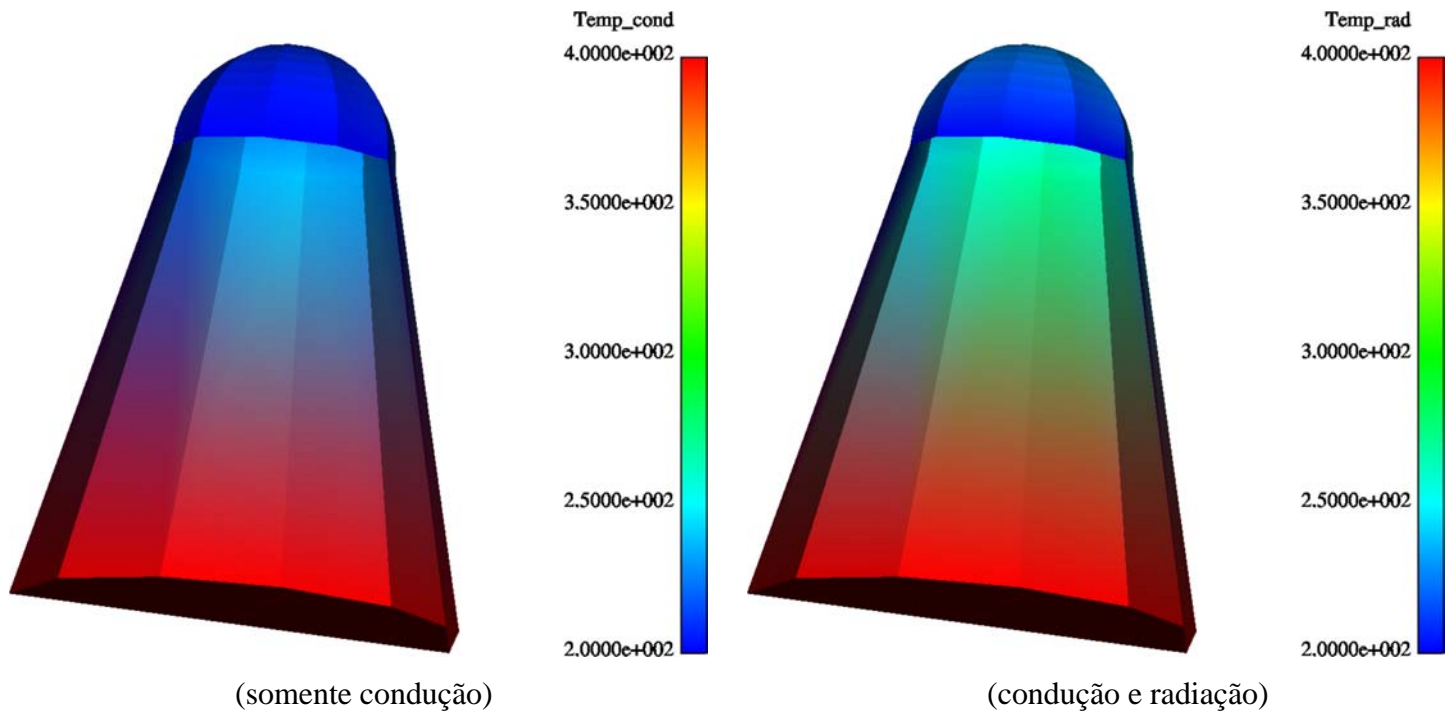


Figura 6.55– Campo de temperaturas obtido no problema ilustrativo

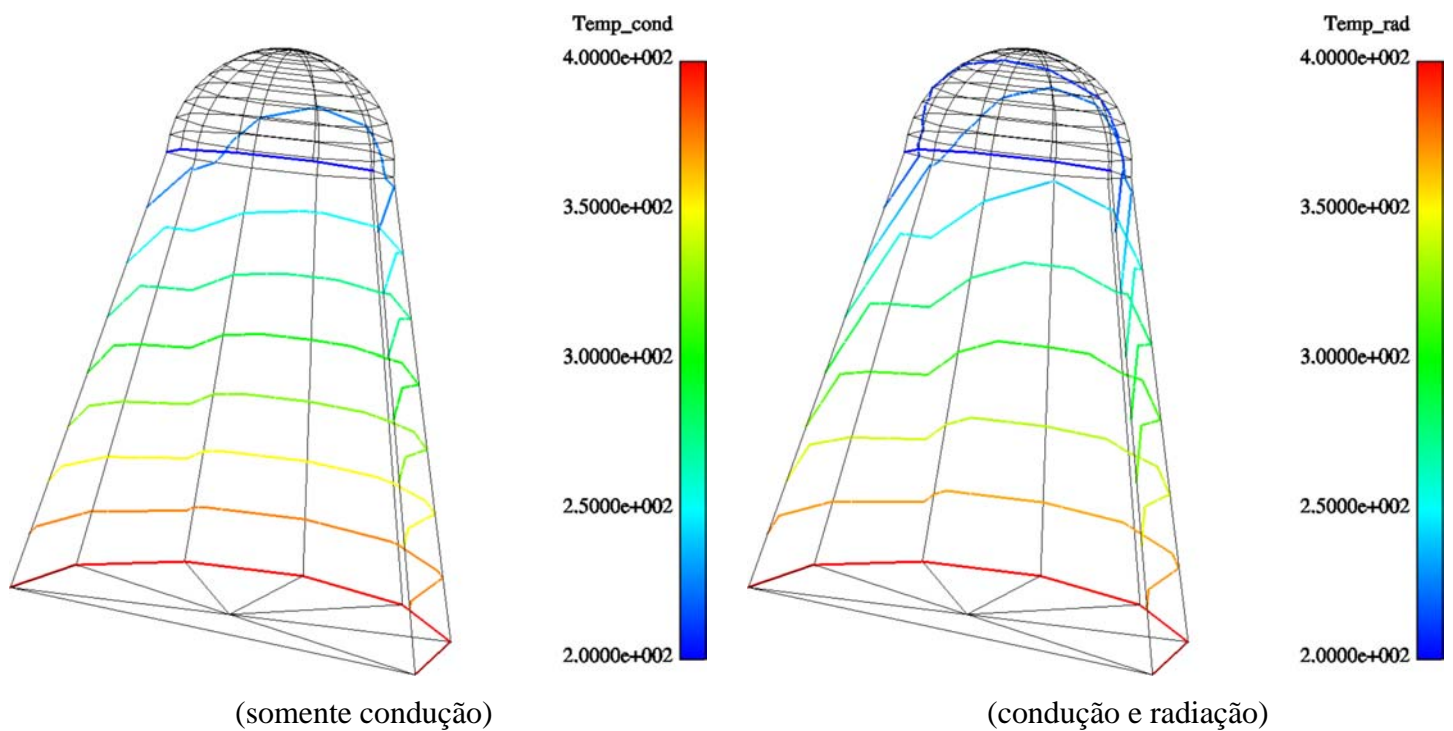


Figura 6.56– Isotermas obtido no problema ilustrativo

Para obtermos uma melhor visualização da influência da radiação, o gráfico contido na

Fig.6.58 apresenta o perfil de temperatura ao longo da linha que corta o hemisfério na direção z (Fig.6.57).

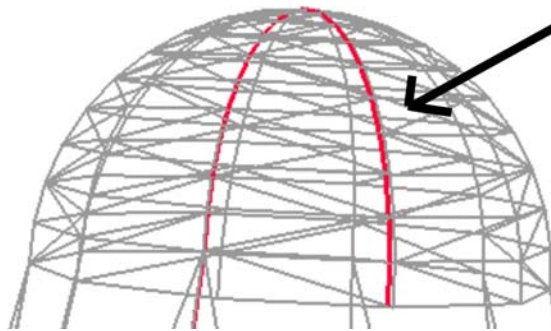


Figura 6.57–Posição da linha ao longo do hemisfério

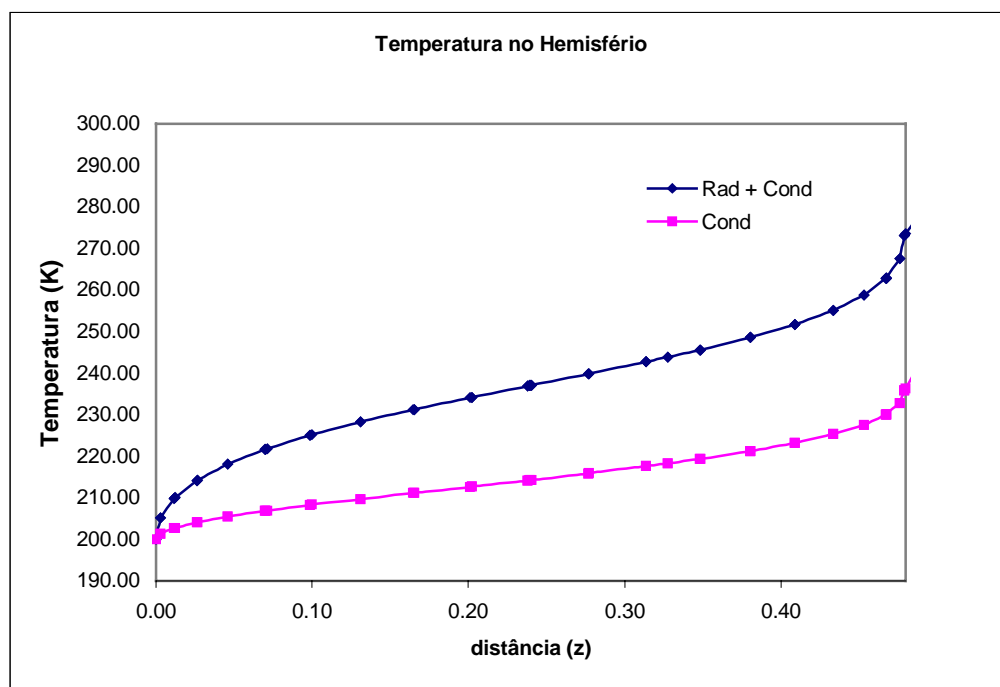


Figura 6.58– Isotermas obtido no problema ilustrativo

Analisando este gráfico, podemos concluir que a radiação exerce, neste caso, uma forte influência elevando as temperaturas em torno de 20 K. Este fato demonstra a importância de levarmos em consideração na construção do modelo os dois modos de transferência de calor.

7 Conclusões e Recomendações

7.1 Conclusões

O presente trabalho apresentou três metodologias diferentes para o cálculo do fator de forma entre superfícies difusas cinzentas na presença de obstruções. Foi implementado um algoritmo para a diminuição do número de checagens por superfícies obstrutoras sendo aqui utilizado nos métodos da Dupla Discretização com aproximação de disco e Integral de Contorno utilizando a expressão de Mitalas-Stephenson. Estes dois métodos foram comparados com o método Hemi-Cube em aspectos como precisão e performance computacional. Uma seqüência de testes foi realizada para avaliar o desempenho dos métodos frente a diferentes configurações geométricas. Analisando os resultados obtidos podemos concluir que:

- Na ausência de obstruções o método da Integral de Contorno com a aproximação de Mitalas-Stephenson fornece os melhores resultados aliado a um reduzido tempo de processamento. Estes excelentes resultados são obtidos avaliando a integral analiticamente na presença de contornos adjacentes e utilizando a técnica da Quadratura Gaussiana para quando a integral é avaliada numericamente.
- O método da Dupla Discretização com a aproximação de disco, embora sensível ao formato dos elementos da malha radiativa, fornece bons resultados à medida que vamos aumentando o número de elementos da discretização. Isto é válido tanto para a presença quanto na ausência de superfícies obstrutoras. Ressalta-se que os bons resultados são somente obtidos quando utilizamos um elevado número de elementos, aumentando o tempo de processamento.
- Mesmo utilizando os algoritmos de checagem para a diminuição da lista de superfícies obstrutoras, os métodos da Integral de Contorno e Dupla Discretização apresentam performance inferior ao método Hemi-cube a medida que o número de superfícies é aumentado.
- Na ausência de obstruções o método Hemi-Cube não oferece vantagens significativas

sobre os outros métodos com relação ao tempo de processamento e precisão. Esta situação se inverte quando a geometria fica mais complexa e obstruções são consideradas, sendo este método o que apresenta melhor relação precisão x tempo de processamento. Isto faz com que o Hemi-Cube seja, dos três métodos estudados, o método mais recomendado para situações reais de engenharia.

Com relação à solução da condução de calor bi-dimensional em placas delgadas, o presente trabalho estudou o método CVFEM utilizando malhas triangulares. Esta solução foi acoplada com a solução do problema radiativo, considerando as superfícies difusas cinzentas, utilizando duas metodologias diferentes. A primeira estratégia utiliza o método de Gebhart e lineariza a equação resultante utilizando o método de Newton. A segunda abordagem resolve a matriz de radiosidades e a matriz de condução sucessivamente. Após a validação destes algoritmos um teste é apresentado para avaliarmos o desempenho destas metodologias. Sobre os resultados destas duas metodologias de solução do problema radiativo-condutivo podemos concluir:

- A solução envolvendo o método das Radiosidades apresenta-se muito instável e demorada. Sua convergência é fortemente dependente do coeficiente de relaxação utilizado. Estas características fazem com que a metodologia aqui empregada não seja recomendada para problemas com forte característica radiativa.
- Para obtermos uma melhor eficiência com a solução envolvendo o método das Radiosidades recomenda-se empregar um coeficiente de relaxação variável ao longo do processo iterativo.
- A solução do problema utilizando o método de Gebhart com a linearização de Newton demonstrou ser robusta e rápida. Esta metodologia também apresenta-se pouco sensível ao aumento da características radiativas do problema. Em virtude do reduzido número de iterações necessárias o tempo maior de processamento é mais influenciado pelo cálculo dos acoplamentos radiativos do que pela solução do campo de temperaturas.

7.2 Recomendações para Futuros Trabalhos

Após a conclusão deste estudo novas possibilidades de pesquisa podem surgir com o

intuito de agregar maior realidade física aos modelos construídos ou a melhoria dos modelos já existentes. Visando estes objetivos, recomenda-se que os futuros trabalhos enfoquem:

- Consideração de materiais com superfícies especulares e direcionais. Isto significa que novas técnicas para o cálculo do fator de forma que considerem estes comportamentos precisam ser pesquisadas e implementadas. Nesta direção, sugere-se que as pesquisas envolvendo o método de Monte Carlo devam oferecer bons resultados.
- Utilização de algoritmos implementados em nível de *hardwares* gráficos para a otimização do método Hemi-Cube, buscando um aumento da performance computacional.
- Pesquisa em métodos de computação gráfica utilizando algoritmos que visam acelerar as operações de projeções, *clipping* e interseção de raios.
- Utilização de técnicas de processamento paralelo, tanto para o cálculo de fator de forma, quanto para a solução dos sistemas lineares.
- Consideração das trocas radiativas no espectro visível e acoplamento com as solução do espectro infra-vermelho.
- No caso de aplicações espaciais, sugere-se também a implementação de rotinas para o cálculo de órbitas e do posicionamento dos objetos com relação ao sol e a terra para que possamos determinar as cargas térmicas incidentes do albedo e infra-vermelho terrestre e da radiação direta incidente do sol.

Referências Bibliográficas

- ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I. A. “*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.*” National Bureau of Standards Applied Mathematics Series #55, Washington DC, p. 916, 1964
- AUPPERLE, L. “*Hierarchical algorithms for illumination.*” PhD Thesis, Department of Computer Science, Princeton University, 1993.
- BARTON, J. J. and NACKMAN, L. R. “*Scientific and Engineering C++: an introduction with advanced techniques and examples.*” IBM Thomas J. Watson Research Center, Addison-Wesley, Yorktown Heights, New York, 1997.
- BALIGA, B. R. and PATANKAR, S. V. “*A New Finite Element Formulation for Convection-Diffusion Problems.*” Numerical Heat Transfer, vol 3, p. 393-409, 1980.
- BAUM, D. R., RUSHMEIER, H. E. and WINGET, J. M. “*Improving radiosity solutions through the use of analytically determined form-factors.*” Computer Graphics (SIGGRAPH '89), Boston, vol. 23, nº 3, p. 325-334, 1989.
- CLARO, A. “*Modelo vetorial esférico para radiosidade aplicado à iluminação natural.*” Florianópolis, 1998. – Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC.
- COHEN, M. F. and GREENBERG, D. P. “*The Hemi – Cube: A Radiosity Solution for Complex Environments.*” ACM – Computer Graphics, v. 19, nº 3, p. 31-40, 1985.
- _____. “*A progressive refinement approach to fast radiosity image generation.*” Computer Graphics (SIGGRAPH '88 Proceedings), vol. 22, nº 4, p. 81-84, 1988.
- CHUNG, T. J. and KIM, J. Y. “*Radiation view factors by finite elements.*” Journal of Heat Transfer, vol. 104, p. 792-795, 1982.
- R. DEMBO, S. C. EISENSTADT, and T. STEINHANG, “*Inexact Newton Methods*”, SIAM J. Numer. Anal., vol. 19, pp. 400-408, 1982.
- DRAKOS, N. “*Radiosity Method.*” Technical Report TR-521-96, Computer Based Learning Unit, University of Leeds, 1996 (1st. In 1993).
<http://www.fsz.bme.hu/~szirmay/radiosit/>
- ECKERT, E. R. G. and DRAKE, R. M. “*Heat and Mass Transfer.*” McGraw-Hill, New York, 1959.

- EMERY, A. F. “View – A radiation view factor program with interactive graphics for geometry definition (version 5.5.3.).” NASA’s Computer Software Management and Information Center, Athens GA, 1986.
- “ESATAN Engineering Manual.” EM - ESATAN - 056. Version 6.1, ALSTOM Energy Technology Centre, 1998.
- FOLEY, J. D., VAN DAM, A., FEINER, S. and HUGHES, J. “Computer Graphics: Principles and Practice.” Second Edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1990.
- GASKI, J. D. “SINDA 1987/ANST.” Network Analysis Associates, Inc. POB 8007, Fountain Valley, CA, 1992.
- GEBHART, B. “Surface temperature calculations in radiant surroundings of arbitrary complexity – for gray, diffuse radiation.” Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 3, nº 4, p. 341-346, 1961.
- _____. “Heat Transfer.” McGraw-Hill, New York, 1961.
- GORAL, C. M., TORRANCE, K. E., GREENBERG, D. P., BATTAILLE, B. “Modeling the Interaction of Light Between Diffuse Surfaces.” ACM – Computer Graphics, p. 213-222, Proceedings 1984.
- GROSS, U. and SPINDLER, K. and HAHNE, E. “Shapefactor Equations for Radiation Heat Transfer Between Plane Rectangular Surfaces of Arbitrary Position and Size With Parallel boundaries”, Letters and Heat and Mass Transfer, Vol. 8, pp. 219-227, 1981.
- HAMILTON, D.C. and MORGAN, W.R. “Radiant Interchange Configuration Factors”, NACA TN-2836, 1952.
- HANRAHAN, P. and SCHRÖDER, P. “On the form factor between two polygons.” Computer Graphics (SIGGRAPH ’93 Proceedings), Annual Conference Series, August 1993.
- HANRAHAN, P., SALZMAN, D. and AUPPERLE, L. “A rapid hierarchical radiosity algorithm.” Computer Graphics (SIGGRAPH ’91 Proceedings), vol. 25, nº 4, p. 197-206, 1991.
- _____. and TELLER, S. “Global visibility algorithms for illumination computations.” Computer Graphics (SIGGRAPH ’94 Proceedings), p. 443-450, June 1994.
- HOTTEL, H. C. “Radiant Heat transmission.” In: Heat Transmission, 3rd ed., chapter 3, McGraw-Hill, New York, 1954.
- HOWELL, J.R. “A Catalog of Radiation Configuration Factors”, McGraw-Hill, New York, 1982.

- IMMEL, D. S., COHEN, M. F. and GREENBERG, D. P. “A radiosity method for non-diffuse environments.” Computer Graphics (SIGGRAPH `86 Proceedings), vol. 20, nº 4, p. 133-142, August 1986.
- INCROPERA, F. P. e DE WITT, D. P. “Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.” 3ª ed., Edit. Guanabara-Koogan, Rio de Janeiro, 1992.
- KADABA, P. V. “Thermal Radiation View Factor Methods, Accuracy and Aided Computer”, NASA/MSFC Report, Contract NGT-01-002-009, 1982.
- KAJIYA, J. T. “The Rendering Equation.” Computer Graphics (SIGGRAPH `86 Proceedings), vol. 20, nº 4, p. 143-150, August 1986.
- KELLER, A. “A Quasi – Monte Carlo algorithm for the global illumination problem in the radiosity setting.” In Monte Carlo and Quasi – Monte Carlo Methods in Scientific Computing (H. Niederreiter and P. Shiue, eds), Springer, p. 239-251, 1995.
- KHODULEV, A. “Comparision of two Methods of Global Illumination Analysis.” Technical Report, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, 1996. <http://rmp.kiaml.rssi.ru/articles/cmgia/index.htm>.
- MALISKA, C.R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.” Rio de Janeiro, RJ, Brasil: ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1995.
- MALISKA JR., C.R., “Geração de Malhas para Domínios 2,5 Dimensionais usando Triângulação de Delaunay”. Florianópolis, 2001. – Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC.
- MODEST, M. F. “Radiative Heat Transfer”, McGraw Hill, 1993.
- MITALAS, G. P. And STEPHENSON, D. G. “FORTRAN IV Programs to calculate radiant interchange factors.” National Research Council of Canada, Division of Building Research, Ottawa, Canada, BDR-25, 1966.
- MÜLLER, S. and SCHÖFFEL, F. “Fast radiosity repropagation for interactive virtual environments using a shadow-form-factor-list.” Technical Report, Fraunhofer Institute for Computer Graphics, Darmstadt, Germany, 1994.
- NUSSELT, W. “Graphische bestmmung des winkelverhältnisses bei der wärmestrahlung.” VDI Z., vol. 72, p. 673, 1928.
- OPPENHEIM, A. K. “Radiation Analysis by the the network Method.” Transf. A.S.M.E. 78, p. 725-735 , 1956.
- PATTANAIK, S. N. and MUDUR, S. P. “Computation of global illumination by Monte Carlo simulation of the particle model of light.” Third Eurographics Workshop on Rendering, p. 71-83, Bristol, UK, May 1992.

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,843 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 10:01 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 156 (approx.)
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)

- PLANCK, M. "*The Theory of Heat Radiation.*" Dover Publications, New York, 1959.
- RADEMACHER, P. "*Calculating form factors.*" Technical Report COMP238, 1997.
<http://www.cs.unc.edu/~rademach/238/ffactors.html>
- RUSHMEIER, H. E. and BAUM, D. R. and HALL, D. E. "*Accelerating the Hemi-Cube Algorithm for Calculating Radiation form Factors.*" Radiation Heat Transfer: Fundamentals and Applications – AIAA/ASME, presented at "Thermophysics and Heat transfer Conference", Seattle, Washington– June, HTD-Vol. 137/46, 1990.
- SALTIEL, C. J. and KOLIBAL, J. "*Adaptive grid generation for the calculation of radiative configuration factors.*" Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 7, nº 1, p. 175-178, 1993.
- SATER100 – ESSS (Engineering Simulation and Scientific Software). "*SATER 100 User's Manual.*" Florianópolis, SC, Brasil, 2000.
- SCHMIDT, O. "*Parallel Online Radiosity.*" Paragraph Research Project, University of Paderborn, 1997.
http://www.unipaderborn.de/fachbereich/AG/monien/RESEARCH/par_online_radiosity.html
- SCHRÖDER, P. "*Numerical integration for radiosity in the presence of singularities.*" Technical Report, Department of Computer Science, Princeton University. Proceedings of 4th Eurographics Workshop on Rendering, 1993.
- SHAPIRO, A. B. "*Computer Implementation, Accuracy, and timing of radiation view factor algorithms.*" J. Heat Transfer, vol. 107, nº 3, p. 730-732, 1985.
- _____. "*FACET – A computer view factor computer code for axisymmetric, 2D planar, and 3D geometries with shadowing.*" UCID-19887, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, August 1983.
- SIEGEL, R. and HOWELL, J.R. "*Thermal Radiation Heat Transfer*", Hemisphere Publishing Corporation, 3rd edition, New York, 1992.
- SILLION, F. and PUECH, C. "*A general two-pass method integrating specular and diffuse reflection.*" ACM – Computer Graphics, v. 23, nº 3, p 335-343, 1989.
- SPARROW, E. M. "*On the Calculation of Radiant Interchange between Surfaces, in Warre Ibele,*" Modern Developments in Heat Transfer, p. 181-212, Academic Press, New York, 1963.
- STUTTARD, D., WORRALL, A., PADDON, D. and WILLIS, C. "*A Radiosity System for Real Time Photo – Realism.*" Technical Report, Kaleidoscope Computer Graphics Laboratory, Department of Computer Science, University of Bristol, Bristol, UK, 1996.

- TAYLOR, R. P. and LUCK, R. and HODGE, B. K. and STEELE, W.G. “*Uncertainty Analysis of Diffuse-Gray Radiation Enclosure Problems*”. Paper AIAA-94-0132, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1994.
- WALLACE, J. R. and COHEN, M. F. “*A two-pass solution to the rendering equation: A synthesis of ray tracing and radiosity methods.*” *Computer Graphics*, v. 21, nº 4, p. 311-320, 1987.
- WALLACE, J. R., ELMQUIST, K. A. and HAINES, E. A. “*A ray tracing algorithm for progressive radiosity.*” *Computer Graphics (SIGGRAPH '89)*, Boston, vol. 23, nº 3, p. 315-324, 1989.
- WALTON, G. N. “*Algorithms for calculating radiation view factors between plane convex polygons with obstructions.*” Presented at “The 24th National Heat Transfer Conference and Exhibition,” Pittsburgh, Pennsylvania, August 9-12, 1987.
- WATT, A. “*Fundamentals of Three-Dimensional Computer Graphics.*” Wokingham, UK: Addison-Wesley, 1990.
- WIESENHOFER, S. “*Numerical Simulation of Thermal Radiation Heat Transfer.*” Diploma Thesis submitted to the Institute for Applied Information Processing and Communications Technology, Graz University of Technology, Austria, March 1996.

Filename: dissert.doc
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot
Title: 1
Subject:
Author: czesnat
Keywords:
Comments:
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM
Change Number: 336
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM
Last Saved By: Marcus Reis
Total Editing Time: 2,843 Minutes
Last Printed On: 7/3/01 10:01 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 156
Number of Words: 37,991 (approx.)
Number of Characters: 216,553 (approx.)